

라플라스 변환(Laplace Transform)

● 설명

- 라플라스 변환(Laplace Transformation)은 선형 상미분방정식의 해를 구하거나 시스템의 전달함수를 구하는 데에 쓰이는 수학적 방법이다. 이 방법을 쓰면 미분방정식이 대수방정식으로 바뀌어 쉽게 풀릴 뿐만 아니라, 시스템의 특성을 분수함수 형태의 전달함수로 나타낼 수 있어서 수학적으로 해석하기 쉬워지기 때문에 제어 시스템의 해석과 설계에도 많이 사용된다.

- 프랑스의 천문학자 · 수학자 피에르 라플라스 [Pierre Simon de Laplace, 1749.3.23~1827.3.5] 의 이름에서 유래한다.

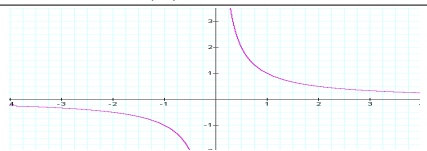
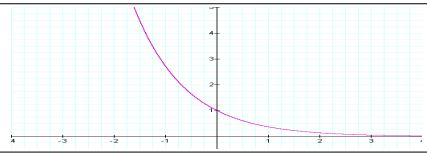
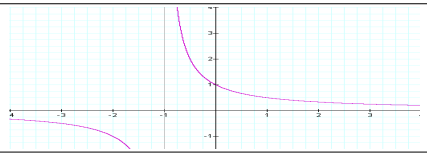
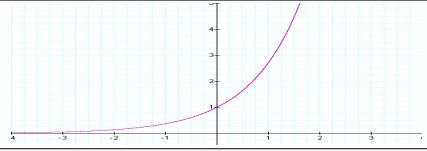
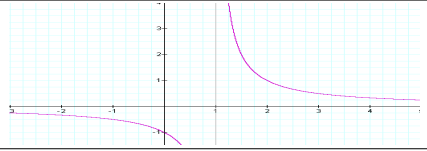
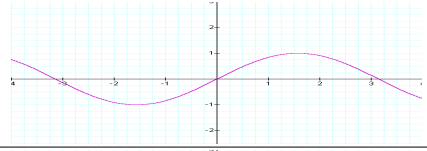
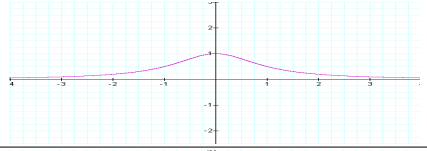
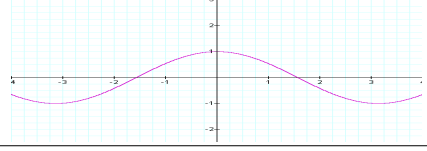
● 정의

임의의 함수 $f(t)$ 가 있을 때, e^{-st} 를 곱한 후, 시간에 대하여 적분한 것으로 정의한다.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

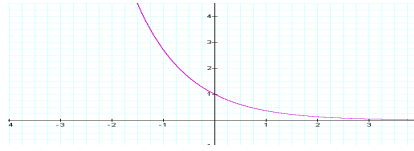
● 변환 예

푸리에 급수전개와 메클로린 급수전개를 반복으로 하면 변환전의 식과 변환후의 식을 유도할 수 있으며, 몇 가지 변환 예제를 그래프로 나타내었다.

	$f(t)$		$F(S)$
1		$\frac{1}{S}$	
e^{-t}		$\frac{1}{S+1}$	
e^t		$\frac{1}{S-1}$	
$\sin t$		$\frac{1}{S^2+1}$	
$\cos t$		$\frac{S}{S^2+1}$	

● 의미

- ① 함수 e^{-st} 는 다음과 같은 그래프로 표현되는 함수이다.



그러므로 s 를 특정상수로 하는 e^{-st} 함수는 0에서 ∞ 까지 적분을 하면 유한의 값으로 수렴하게 된다.

- ② $e^{-st} \cdot f(t)$ 는 어떻게 될까 ?

수렴하는 지수함수 e^{-st} 를 임의의 함수에 곱하면 유한한 값으로 수렴하는 함수가 되므로 시간에 대한 적분이 가능해진다.(발산함수의 경우, 적분계산 불가)

일단 곱해서 수렴되는 함수로 만든 후, 시간에 대하여 적분을 취하면 시간변수 t 는 사라지고 s 의 함수가 된다. 즉, 시간 t 에 관한 함수가 s 에 대한 함수로 변환된다는 것을 의미한다.

- ③ s 는 무엇인가 ?

s 는 일반적으로 복소변수라고 하며, $s = \sigma + j\omega$ 로 표현되는데 σ 는 정수, ω 는 각속도를 나타내므로 결과적으로는 주파수 f 의 함수 형태가 된다고 할 수 있다.

- ④ 왜 e^{-st} 일까 ?

일반적으로 적분계산을 할 때 삼각함수와 지수함수의 경우에는 부분적분을 2회 수행한 후, 원시함수와의 관계를 이용하여 최종 결과식을 정리하게 된다. 그러므로 변환을 위해서는 시간변수를 가지는 삼각함수나 지수함수를 이용하여야 하는데 시간에 따라 수렴하는 함수는 지수함수이기 때문에 함수 e^{-st} 를 변환에 이용한 것이다.