미분의 역사

미분학은 곡선에 접선을 그리는 것과 함수의 최대 최소값을 찾는 것에서부터, 적분학은 곡선으로 둘러싸인 부분의 면적을 구하는 것에서부터 시작되었다. 이것들은 그리스 시대에도 논해지기는 했었다. 그러나 그리스 사람들이 생각한 접선이란 원에 대해서는 원과 한 점을 공유하고 있지만, 그 이외의 점은 공유하지 않는 직선이란 의미이고 이 정의는 말하자면 정적이었다.

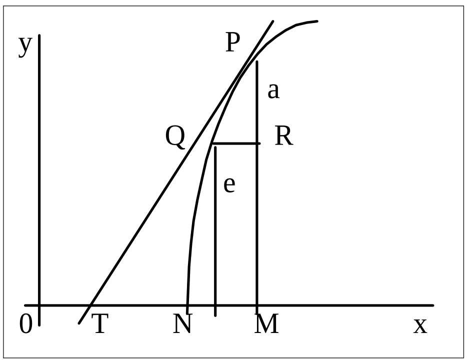
진정한 미분법의 예견은 페르마에서부터 시작되었다. 페르마는 만약 $f(x)$가 x에서 통상적인 최대·최소값을 갖는다고 할 때 e를 매우 작은 값으로 놓으면 $f(x+e)$ 의 값은 $f(x)$의 값과 거의 같다고 하여 임시로 $f(x+e)=f(x)$ 라고 놓았다. 이 방정식을 푼 다음 e에 0을 대입함으로 등식을 교정하면, 그 결과 얻어진 방정식의 근은 $f(x)$를 최대·최소로 만드는 값 x가 된다.

그의 방법은 $\lim_{n\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ 으로 놓는 것과 동치임을 알 수 있다. 즉 $f(x)$의 미분계수를 0과 같이 놓는 것과 동치이다. 이것은 함수 $f(x)$의 통상적인 최대·최소 값을 찾는 전통적인 방법이다. 그러나 페르마는 $f(x)$의 도함수가 0이 되는 것은 통상적인 최대·최소값이 되기 위한 충분조건이 아닌 필요조건이라는 사실을 깨닫지 못했다. 게다가 이 방법은 최대값과 최소값 사이의 차이를 구별하고 있지도 않다.

한편 배로는 그의 책 '광학과 기하학 강의'에 현대적인 미분 과정과 매우 근접한 내용을 싣고 있다. 그것은 오늘날 미분적분학 교과서에서 찾아볼 수 있는 '미분삼각형'이라 부르는 것을 사용하였다. 주어진 곡선 위의 한 점 P에서 접선을 찾을 때 Q를 그 곡선 위의 점으로 P의 근방에 있다고 놓았다. 그러면 삼각형 PTM과 삼각형 PQR은 거의 닮은꼴이다. 그래서 배로는 그 작은 삼각형이 무한히 작게 될 때 등식 $\frac{RP}{QR}=\frac{MP}{TM}$ 이 성립한다고 주장했다. 또 $QR=e$, $RP=a$라고 하고, 만약 P의 좌표들이 x와 y이면, Q의 좌표들은 $x-e$ 와 $y-a$ 가 된다. 이 값들을 주어진 곡선의 방정식에 대입하고 e와 a의 이차 이상의 거듭제곱을 무시하면, 비 $\frac{a}{e}$를 찾게 된다. 그러면

$$OT=OM-TM=OM-MP\left(\frac{QR}{QP}\right)=x-y\left(\frac{a}{e}\right)$$

가 성립하므로 접선이 결정된다.

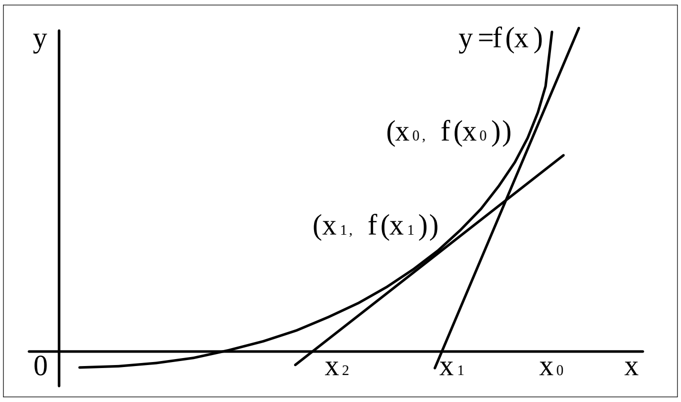


이처럼 페르마와 베로, 그리고 그 당시 일부 학자들의 업적에 힘입어 미분법의 과정이 발전했으며, 많은 수의 최대 최소문제와 많은 곡선들에 대한 접선을 작도하는데 적용되었다. 그러나 적분과 미분이 서로 역의 관계에 있다는 사실은 알지 못했다. 이것이 가능해 진 것은 뉴턴

과 라이프니츠에 의해서이다.

뉴턴은 $y=f(x)$ 위에서 $f(x)=0$ 인 지점을 찾아가는 방법으로 $y=f(x)$ 위에 임의의 한 점 $(x_0, f(x_0))$ 을 잡아 그 점에서 접선의 방정식을 찾는다. 이 접선의 방정식에서 $y=0$ 이 되는 값 x_1을 찾아 이것을 $y=f(x)$ 에 대입한다. 다시 이 점 $(x_1, f(x_1))$에서 접선의 방정식을 찾아 $y=0$ 이 되는 값을 찾는다. 그 다음에 이런 식으로 계속해서 계산해 나가면 결국 $y=f(x)$ 위에서 $y=0$ 인 지점에 도착하게 된다.

뉴턴의 미분적분학은 유율법(流率法)이라 불린다. 그는 운동과 관련해서 일어나는 속도라든지 가속도의 개념을 나타내는 수학적 방법으로 유율법을 만들어 냈다. 유율법에서 가장 기본이 되는 수학문제는 첫째, 운동체가 통과하는 거리를 알고 그



속도를 알아내는 것, 둘째, 속도와 시간을 알고 운동체가 통과하는 거리를 알아내는 것이었다. 이 둘은 서로 역의 관계에 있으며, 첫 번째는 미분, 두 번째는 적분이다. 뉴턴은 유율법을 수없이 응용하여 극대와 극소, 곡선의 접선, 곡선의 곡률, 변곡점, 곡선의 요철 등을 결정하고 그의 이론을 수많은 구적법과 곡선의 길이를 구하는 문제에 적용하였다.

뉴턴이 발견한 미분적분법은 그와 거의 같은 시기에 독일사람 라이프니츠에 의해서도 독립적으로 발견되었다. '접선 및 최대값과 최소값을 찾는 새로운 방법, 이 방법은 분수 또는 무리수에 의해서 제약을 받지 않으며, 이것을 위한 뛰어난 계산법' 이라는 제목으로 1684년에 출판된 논문에서 라이프니츠는 미분법의 간결한 해설을 발표하였다. 오늘날 사용되고 있는 미분법의 표기와 도함수를 계산하는 일반적인 많은 법칙이 이 논문에서 라이프니츠에 의해 제시되었다.

라이프니츠는 카발리에리의 불가분량의 합을 나타내는 라틴어 summa(합)의 첫 문자를 딴 S를 길게 늘인 문자로서 현대 적분 기호인 $\int$를 처음 사용하였다. 적분의 기호에 관하여 미분하여 $f(x)$가 되는 함수, 즉 (Ⅰ) $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 (Ⅱ) $F(x)=\int f(x)dx$ 로 나타내었다. 그는 (Ⅰ)을 (Ⅲ) $dF(x)=f(x)dx$와 같이 나타내고, 이 식의 양변에 연산 $\int$을 실시하면 $\int dF(x)=\int f(x)dx$ 이기 때문에, 좌변에서는 $\int$와 d가 상쇄되어 (Ⅱ)가 나온다고 설명하고 있다. 또, (Ⅱ)에서 연산 d를

실시하면 $dF(x) = d\int f(x)dx$ 이기 때문에 우변의 d와 $\int$가 상쇄되어 (III)가 나온다고 결론지었다. 즉 라이프니츠에게 있어서는 $F(x)$가 주어져 있을 때 $f(x)$를 구하는 것이 미분한다는 것이며, $f(x)$가 주어져 있을 때 $F(x)$를 구하는 것이 적분이다. 위와 같이 정리해 두면 $\int$와 d는 서로 역의 산법을 나타내는 기호가 되어 취급이 편리해진다. 라이프니츠의 이 편리한 기호 덕분으로 계산기술이 발달하였다. 오늘날 수학에서 빼놓을 수 없는 좌표라든가 함수 등의 개념, 낱말도 라이프니츠가 창안해낸 것이다.

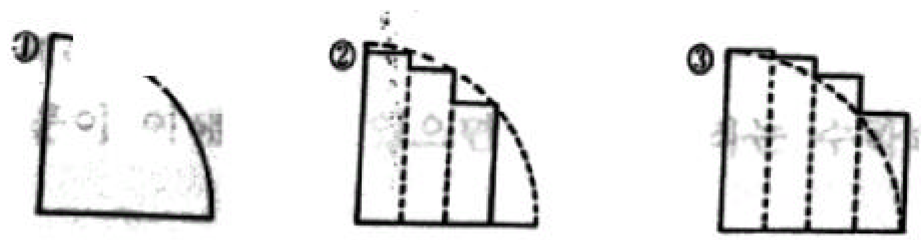
그러나 뉴턴과 라이프니츠는 미분법의 본질을 완전히 인식하지는 못하였다. 그들은 미분적분학의 기초 개념을 정확히 규명하기에 앞서 그것을 이용하고 그 이론을 전개해 나가는 데 바빴기 때문이다. 미분적분법의 장점은 낱낱의 문제에 대하여, 그 때마다 특별한 기교를 생각해야 할 필요가 없이 무한소와 관련되는 모든 문제를 미분계수를 구하거나 부정적분을 만든다는 두 가지 기초적 문제로 해결할 수 있고, 이러한 작업을 거의 기계적으로 할 수 있다는 점이다. 그러나 미분적분법에서 다루어지는 문제는 반드시 이 방법에 의하지 않고도 해결될 수 있었기 때문에 처음에는 이러한 장점이 충분히 인식되지 않았다.

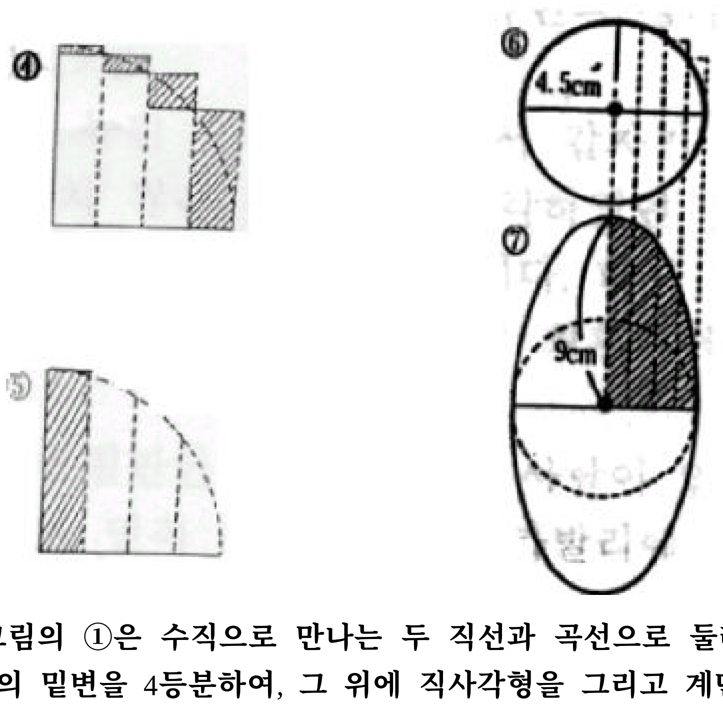
적분의 역사

1. **뉴턴의 면적 계산서 정리와 적분의 시작**

뉴턴이 남긴 「자연철학의 수학적 원리」- 일명 「프린키피아」- 라는 저술은, 근대 이후 현대에 이르는 물리학의 기틀이 된 불멸의 책이다. 그가 살았던 때는 이른바 청교도혁명, 왕정복고, 명예혁명으로 이어지는 정치적 혼란의 시대였으므로, 영국인에게 있어서 그의 이름은 이 어두웠던 시대의 또 다른 밝은 일면을 나타내는 영국의 영광을 상징하는 것이기도 한다. 이 책에는 적분법을 이용한 면적 계산의 정리가 실려 있다.

복잡한 이론은 생략하고, 대강의 내용을 그림으로 설명하면 이 학문에 별로 소양이 없는 사람도 충분히 그 계산법을 이해할 수 있을 것이다.





위 그림의 ①은 수직으로 만나는 두 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형이다. ②는 이 도형의 밑변을 4등분하여, 그 위에 직사각형을 그리고 계단 모양의 도형을 만든 것이다. ③도 같은 방법으로 계단 모양의 도형을 만든 것이지만 ②와는 대조적으로

각 직사각형의 좌측꼭지점이 곡선 위에 있으며, 계단형의 도형의 일부는 곡선 밖으로 나와있다.

뉴턴의 정리를 이 그림으로 설명하면 다음과 같다.

“②,③에서 밑변을 아주 세분하여, 각 직사각형의 밑변의 길이를 한없이 작게 하면, ②,③의 도형의 면적은 ①의 면적에 점점 가까워지고, 마지막에는 ①,②,③이 서로 일치한다.”

그 이유(=증명)는,

“①의 면적은 ②,③의 중간에 있다. 그런데 ②,③의 면적의 차는 ④의 빗금 친 부분이다. 이것들을 왼쪽으로 한데 모아 보면, ⑤의 빗금 친 직사각형이 된다. 그런데 이직사각형의 면적은, 밑변의 길이를 한없이 작게 하면, 마지막에는 0이 된다. (높이만이 있고, 폭이 없는 직사각형이 되기 때문에!)

이때, ②,③의 면적은 일치한다. 따라서 이것들의 중간에 있는 ①의 면적도 마땅히 ②,③과 일치해야 한다.“

위의 내용을 충분히 이해할 수 있으면 적분학이라는 수학의 중요한 내용을 터득한 셈이 된다.

이 정리를 바탕으로, 반지름 4.5cm인 ⑥의 원을, 가로 폭은 그대로 둔 체, 세로를 2배로 늘였을 때의 타원의 면적을 구해보면, ⑦의 빗금 친 직사각형은 모두 이것에 대응하는 ⑥의 직사각형의 2배이므로, 뉴턴의 정리로 해를 구할 수 있다.

[답] 3.14×81/4×2

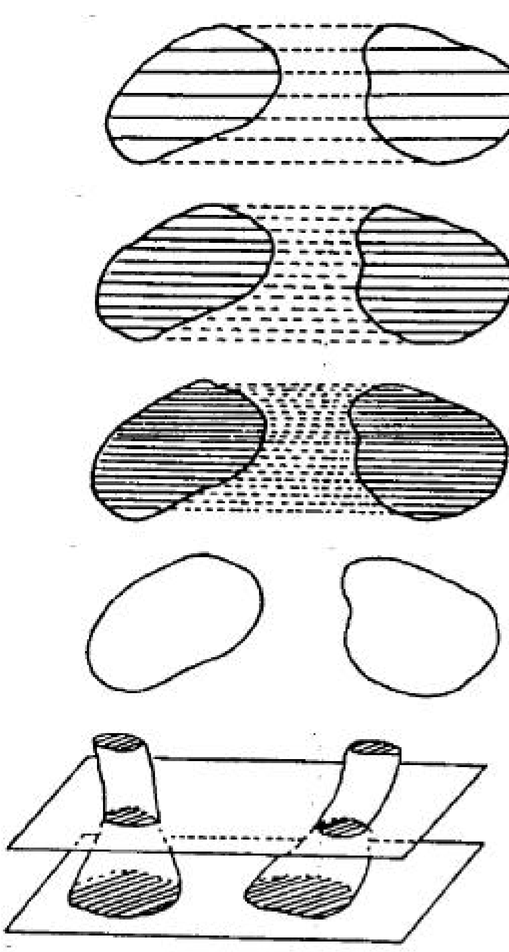
물론, 이러한 생각은 뉴턴 혼자의 머리에서 갑자기 태어난 것은 아니다. 그보다 먼저, 여러 시대에 걸쳐 많은 사람들이 생각하였던 것을 뉴턴이 누구나 알기 쉬운 형태로 정리한 것이라고 해야 옳을 것이다. 다시 말하면 깜깜한 굴속에서 여러 사람에 의해 다듬어진 미완성의 조각에 최후 내놓은 사람이 뉴턴이었다 고나할까?

뉴턴의 선구자로 손꼽힐만한 업적을 세운 사람이 앞에서 이야기 한 카발리에리이다. 그가 발견하였던 면적 계산의 원리(‘카발리에리의 원리’)는 뉴턴의 방법에 비하면 유치한 데가 있었으나, 어떤 도형을 면적이 구해지기 쉬운 도형으로 바꾸고 계산하는 데는 편리하다. 게다가 그의 방법에는 그림을 보면 알 수 있는 바와 같이 ‘극한’의 생각이 이미 담겨지고 있었다.

뉴턴의 방법도 이론적으로 잘 다듬어진 지금의 미적분학에 비하면, 불완전한 점이 적지 않다. 그러나 그는 정밀한 수치 계산에 의해서 숨은 법칙을 찾아내고, 오차를 적절히 처리하여 잘못된 결론에 빠지는 것을 피함으로써 이러한 결점을 보완할 수 있었다. 오히려 불완전한 이론을 함부로 써서 잘못을 저지른 것은 그 후의 수학자들에게 많았다. 19세기의 엄격한 이론 수학이 탄생한 것은 이들에 대한 비판이 계기가 된 것이다. 이 점에 관해서 뉴턴은 아주 신중하였다.

2. 라이프니츠의 적분의 기호화

뉴턴과 더불어 미적분학의 발견자로서의 영광을 나누어 가진 라이프니츠는 뉴턴보다 조금 뒤에 이 학문을 착안했지만, 여기에 사용되는 편리한 기호를 만들었다는



카발리에리의 면적 · 체적 계산에는
극한의 생각이 담겨져 있다!

점에서 뉴턴보다도 높이 평가받고 있다.

철학자이기도 하였던 라이프니츠는 철학에 있어서의 기호적 상징의 중요성을 깊이 생각했던 사람으로, 기호적 계산에 의해서 인간의 사고 세계를 나타낼 수 있다는 착상을 젊었을 때부터 가지고 있었다. 미적분학도 그러한 발상을 바탕에 깔고 있다. 오늘날 미적분학에서 쓰이고 있는 기호 중에는 $\frac{dy}{dx}$, $\int dx$ 등 라이프니츠가 고안했던 것들이 많다.

또, 라이프니츠가 이름을 지은 '무한소'와 '해석'이라는 명칭이 '무한소해석'이 되고, 그 후 몇 번의 단계를 거쳐서 '미적분학'이라는 명칭으로 정착하게 되는데, 알고 보면 이것 역시 라이프니츠의 공이라고 할 수 있다.

뉴턴과 라이프니츠가 독자적으로 미적분학의 착상을 얻게된 것은 사실이지만, 두 사람 모두 혼자만의 힘으로 미적분학을 세운 것은 결코 아니다. 뉴턴은 스승 윌리스의 영향을 크게 입었으며, 라이프니츠 역시 네델란드의 수학물리학자이고 미적분학의 선구자 중의 한 사람인 호이겐스에게 직접 가르침을 받았다는 사실을 기억해 둘 필요가 있다.

그러나 미적분학의 창시자로서 뉴턴과 라이프니츠의 근본적인 차이점은, 뉴턴이 물리학의 연구와 관련있는 운동의 개념을 배경으로 삼고 있는데 대해 라이프니츠는 '원자론적'이라고나 할 철학적인 입장을 취하고 있었다는 점이다.

3. 적분학의 정비

오일러의 <무한해석 서설>(1748년)은 함수 · 무한소 · 극한 등에 관해 따로 정의하지 않았고, 실수에 관해서는 확인된 무한급수, 무한곱에 복소수를 대입하는 경우에도 이론적으로 검토하는 일을 별로 하지 않았다. 이에 대해 비판적인 입장을 취한 달랑베르는 극한과 도함수의 둘이 무한소해석의 기초임을 지적하였다. 그러나 해석학의 철저한 이론적 정비작업은 코시에 의해 비로소 이루어졌다. 코시는 <해석학 과정>속에서, 변수 · 상수 · 극한값 등을 정의하여, 이것을 바탕으로 차례로 무한소 · 함수 · 연속 · 무한급수의 합 등을 정의하였다. 예를 들어,

『여러 변수 사이에서, 그 중 하나가 어떤 값을 취하면, 이에 따라 나머지 변수의 값이 모두 정해진다는 관계에 있을 때., 처음 변수를 '독립변수', 나머지 변수를

그 독립변수의 '함수'』

라고 하였으며, '연속'은

『무한소의 변수 i에 대한 함수값의 차 f(x+i)-f(x)가 무한소』

인 것, 그리고 '무한소'는

『0을 극한값으로 삼는 변수』

또'무한급수의 합'은 현재와 마찬가지로 부분합의 극한으로서 각각 정의되어있다.

『발산하는 급수는 합을 갖지 않는다.』

는 것이 밝혀진 것도 여기에서이다. 그의 <미분적분학 요강>에서는 도함수,정적분이 정의되고, <평균치의 정리>를 거쳐, 미적분학의 체계가 '미분적분학의 기본정리'를 중심으로 이루어지고 있다. 이 코시의 체계는 현재의 그것과 거의 같다. 연속함수에 대해 정적분이 존재한다는 것을 처음으로 증명한 사람이 코시였다는 사실도 덧붙일 필요가 있다. 왜냐하면, 증명 그 자체에 못지 않게 이러한 극한값의 '존재'를 증명한다는 것부터가 새로운 수학의 흐름을 말해 준다는 점에서 주목을 끌기 때문이다. 즉, 이러한 존재가 수학상의 진정한 문제가 된 것은 해석학의 대상이 경험적 대상의 세계로부터 독립하게 되었다는 새로운 상황의 출현을 뜻하는 것이기 때문이다.

4. 적분학에 영향을 끼친 미분방정식

미적분학의 성립과 발전에 큰 몫을 한 것으로 미분방정식의 연구를 들 수 있다. 예를 들어, 17세기를 전후한 갈릴레이, 뉴턴, 호이겐스등에 의한 역학과 관련된 연구를 비롯하여, 라이프니츠 등의 곡선문제의 이론, 그리고 18세기에 있어서의 베르누이 가족, 오일러, 라그랑쥬 등에 의한 여러 가지 특정미분방정식의 해법 등이 그것이다. 미분방정식의 해법에 관해서는 처음으로 적분을 써서 직접 그 해를 구하였으나, 이어서 함수의 급수전개를 이용한 해법등이 고안되었다. 그러나 전반적으로 따져 보면, 특수한 경우를 제외하고, 이를테면 대수방정식론과 같은 통일적인 이론은 아직껏 이루어지지 않고 있다. 그런데, 이 미분방정식의 이론에서 가우스의 대수학의 기본정의에 상당하는 해의 존재의 문제에 처음 착수한 것은 코시였다. 그의 증명은 완전한 것은 아니었으나, 아무튼 해의 '존재'를 증명할 필요를 인식하고, 증명의 줄거리를 제시하였다는 의의는 크다.

미분과는 따로 적분을 정의한 다음에, 코시는 적분과 미분의 역연한 사이의 관계를 증명해야 한다. 여기서 그는 평균치의 정리를 써서 그것을 증명하고 있다. <평균치의 정리>, 즉

『f(x)가 폐구간 [a,b]에서 연속이며, 개구간(a,b)에서 미분 가능하면,

a<x<b이고, 또f(x)-f(a)=(b-a)f'(x)를 만족하는 어떤 값x이 존재한다.』

라는 정리는 이미 1세기 전부터 알려진 <로르의 정리>를 일반화한 것이다. 그러나 평균치의 정리는 코시의 시대까지는 중요성이 충분히 인식되어 있지 않았으며, 그에 의해 정면으로 다루어진 이후에야 비로소 해석학의 기본적인 중요 정리로서의 구실을 지키게 되었다. 오늘날 f(x)와 g(x)에 적당한 제한을 붙인 보다 일반적인 형태의

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

이 <코시의 평균치 정리>로 불리어지고 있는 것은 이 때문이다.

코시가 연속함수에 대한 정적분의 존재를 증명하였다는 것은 이미 앞에서 이야기하였지만, 리만은 같은 문제를 코시와는 역방향으로 다루었다. 즉, f(x)가 구간 $[X_0,X]$에서 정의되어 있을 때, 리만은 코시와 마찬가지로 구간을 임의의 유한 개의 점

$$X_0 < X_1 < X_2 < X_3 \cdots\cdots < X_n = X$$

로 분할하여 근사적인 합을 생각하였으나, 코시가 f(x)를 연속함수에 한정시킨데 대해, 리만은f(x)를 유계인 것으로만 가정하여, 이것에 어떤 조건을 덧붙이면,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k'})(x_{k+1} - x_k) \quad (x_k \leq x_{k'} \leq x_{k+1})$$

이 수렴하게 되는가를 생각하여, 그렇게 되기 위한 필요충분조건을 유도하였다. 리만은 여기서 어떤 작은 구간에도 무수의 불연속점이 있으면서, 임의구간에서 적분가능인 보기를 들어, 연속함수와 적분가능함수의 개념차를 명확히 하고 있다. 디리클레의 경우와 같이 여기서도 점의 무한집합이 해석학 속에서 차츰 대상화되어 가는 예를 볼 수 있다.

리만적분과 르벡적분

Ⅰ. 리만 적분 (Riemann Integral)

1. 수학자 Bernhard Riemann

Bernhard Riemann lived from 1826 to 1866. Riemann's ideas concerning geometry of space had a profound effect on the development of modern theoretical physics. He clarified the notion of integral by defining what we now call the Riemann integral. Riemann moved from Gottingen to Berlin in 1846 to study under Jacobi, Dirichlet and Eisenstein. In 1849 he returned to Gottingen and his Ph.D. thesis, supervised by Gauss, was submitted in 1851. In his report on the thesis Gauss described Riemann as having a gloriously fertile originality. On Gauss's recommendation Riemann was appointed to a post in Gottingen. Riemann's paper Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, written in 1854, became a classic of mathematics, and its results were incorporated into Albert Einstein's relativistic theory of gravitation. Gauss's chair at Gottingen was filled by Dirichlet in 1855 and, after his death, by Riemann. Even at this time he was suffering from tuberculosis and he spent his last years in Italy in an attempt to improve his health. Riemann's ideas concerning geometry of space had a profound effect on the development of modern theoretical physics and provided the concepts and methods used later in relativity theory. He was an original thinker and a host of methods, theorems and concepts are named after him.

1854년 리만은 현재 우리가 리만적분으로 알고 있는 것의 정의에 의하여 '적분가능성'의 개념을 명확히 하였는데, 이 적분의 정의는 함수가 적분된다는 것은 무엇을 뜻하는지를 나타낸 것이었다. 즉, 우리가 함수의 미분가능성에 대해 이야기하는 것과 마찬가지로 적분가능성에 대해 말한 것이 리만적분이라고 할 수 있다. 이 리만적분은 길이, 면적, 체적등을 측정하는데 적합한 것으로 연속적인 변화량의 측정에 적합하다. 리만적분에 대해 알아보면 다음과 같다.

2.기본개념

1> 리만합 (Riemann Sum)

리만합과 하합, 상합의 개념에 대해 먼저 알아보면, 다음과 같다.

$a < b$, $f(\chi)$는 폐구간 〔a,b〕에서 연속인 함수라고 한다. 구간 〔a,b〕 사이에 n+1개의 점, χ_0, $\chi_1 \cdots\cdots \chi_n$ 을 잡고,

$$a=\chi_0 < \chi_1 \cdots\cdots < \chi_n = b$$

$a=\chi_0$ χ_1 χ_2 …… χ_{n-1} $\chi_n = b$

라고 하면, 이 때 집합 $P=\{\chi_0, \chi_1 \cdots\cdots \chi_n\}$을 구간 〔a,b〕의 분할(partition)이라고 한다. 즉, 구간 〔a,b〕를 n개의 소구간으로 나누는 n+1개의 분점들($a=\chi_0 < \chi_1 \cdots\cdots < \chi_n = b$)의 집합 P를 분할(partition)이라고 한다. 여기서 한 개의 분할이 주어졌을 때, 여기에 몇 개의 점을 더 첨가하면 새로운 분을 계속해서 얻을 수 있는데. 일반적으로 두 개의 분할 P,Q가 주어졌을 때 $P \subset Q$ 이면, Q를 P의 세분이라고 한다.

이 때. 구간 $[\chi_{i-1}, \chi_i]$ ($i=1,2\cdots\cdots n$)의 한 점 c_i를 두고 합

$$f(c_1)(\chi_1-\chi_0)+f(c_2)(\chi_2-\chi_1)+\cdots\cdots+f(c_n)(\chi_n-\chi_{n-1})$$

를 만든다. 이를 리만합 (Riemann Sum) 이라고 한다.

또, 이 구간의 점 s_i, t_i에서 각각 최대값과 최소값을 갖는다고 할 때, (f가 연속이므로 f는 각 소구간에서 하나의 최대값과 하나의 최소값을 갖는다. 리만적분은 함수의 연속성을 전제로 한다)

$$f(s_1)(\chi_1-\chi_0)+f(s_2)(\chi_2-\chi_1)+\cdots\cdots+f(s_n)(\chi_n-\chi_{n-1})$$

을 분할 P에 대한 f의 상합(upper sum) 이라고 한다.

즉, 구간 $[\chi_{i-1}, \chi_i]$ 위에서의 f의 최대값 $M_i(M_i=\max|f(\chi)|, \chi_{i-1}\le\chi\le\chi_i)$이 있을 때, f의 상합 U (f:p)는

$$U(f:p)=\sum_{i=1}^{n} M_i(\chi_{i-1}, \chi_i)$$

으로 정의된다.

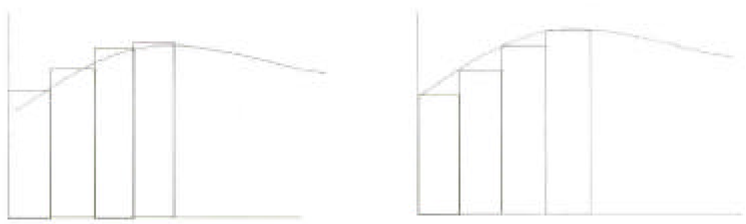
마찬가지로 하합 (Lower sum)은

$$f(t_1)(\chi_1-\chi_0)+f(t_2)(\chi_2-\chi_1)+\cdots\cdots+f(t_n)(\chi_n-\chi_{n-1})$$

으로 나타내고 , f의 최소값 m_i ($m_i=\min|f(\chi)|, \chi_{i-1}\le\chi\le\chi_i$)이 있을 때, f의 하합은

$$L(f:p)=\sum_{i=1}^{n} m_i(\chi_{i-1}, \chi_i)$$

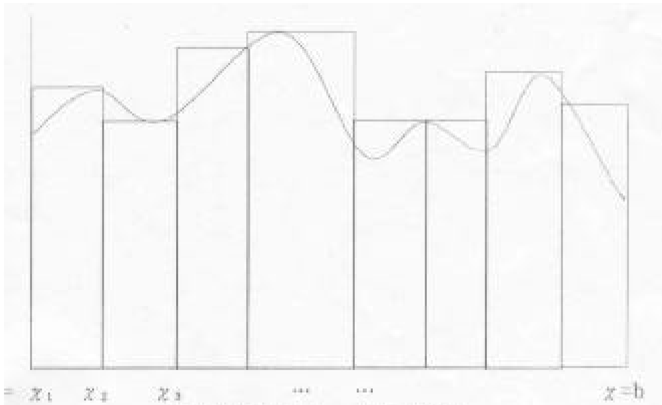
으로 정의된다. 상합과 하합을 그림으로 간단히 나타내면,



U(f : P)　　　L(f : P)

이다. 이 때,f의 상합과 하합은 그림에서 알 수 있듯이 f의 그래프에 대한 면적의 근사값이다.

그리고 구간 $[\chi_{i-1}, \chi_i]$ **에 속하는 모든** c_i**에 대해서** $f(t_i) \leq f(c_i) \leq f(s_i)$ **가 성립하고** $\chi_i - \chi_{i-1} > 0$**이므로** $L(f;p) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(\chi_{i-1}, \chi_i)$ **가 성립한다. 즉, 리만합은 항상 하합과 상합 사이에 있다.**



♠리만합의 예 (= 구분구적법)

<정리> 우리가 배운 적분의 개념과 관련하여 생각해 볼 때 , 리만합과 상합, 하합은 그래프의 면적의 근사값이다. 즉, 리만합과 상합, 하합은 한 그래프가 주어졌을 때 χ축을 몇 개의 구간으로 나누어서 여러 개의 사각형을 만들고 그 넓이의 합을 구한 것을 말한다.

2> **유계, 상한, 하한**

S**를 공집합이 아닌 실수의 집합이라고 할 때,** S**의 모든 원** χ**에 대하여**

$$\chi \leq B$$

인 수 B**가 존재할 때 집합** S**는 위로 유계**(bounded above)**하다고 말하고** B**를** S**의 상계라고 한다. 상계들 중에서 최소인 상계를 특히** S**의 최소상계 또는 상한이라 하고 이를**

$$\sup S$$

로 나타낸다.

Ex> $S = \{1 - 1/n \mid n$**은 양의 정수**$\}$ **는 위로 유계이고 상한은** 1

또 S**의 모든 원** χ**에 대해서**

$$A \leq \chi$$

인 수 A**가 존재할 때** S**는 아래로 유계**(bound below)**하다고 말하고** A**를** S**의 하계라고 한다. 하계들 중에서 최대인 하계를 특히** S**의 최대하계 또는 하한이라 하고**

$$\inf S$$

로 나타낸다.

Ex> $S = \{1/n \mid n$**은 양의 정수**$\}$ **는 아래로 유계이고 하한은** 0

여기에서 다음이 성립한다.

☞ **공집합이 아닌 실수의 집합이**
· 위로 유계이면 상한이 존재
· 아래로 유계이면 하한이 존재

3> **상적분과 하적분**

상한, 하한에 대해서 하합과 리만합, 상합 사이에 다음의 공리가 성립한다.

<공리> 〔a,b〕 **에서** $f(\chi)$**의 상한, 하한을 각각** M,m **이라 하면,임의의 분할** P **에 대해서**

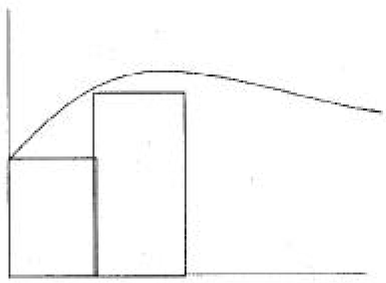
$$m(b-a) \le L(f:P) \le S(f:P) \le U(f:P) \le M(b-a)$$

한편 다음의 공리도 성립한다.

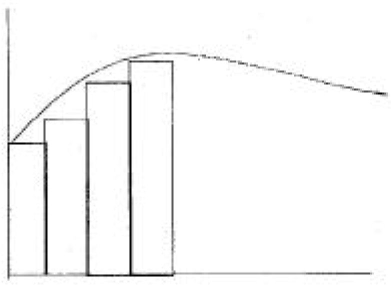
<공리> f**를 구간** 〔a,b〕 **에서 연속인 함수라 하고** $P=\{\chi_0, \chi_1 \cdots\cdots \chi_n\}$ **을 구간** 〔a,b〕 **의 한 개의 분할이라고 한다.** Q**를** P**의 세분이라고 하면** (P,Q**는 분할** , $P \subset Q$) ,

$$L(f:P) \le L(f:Q) \le U(f:Q) \le U(f:P)$$

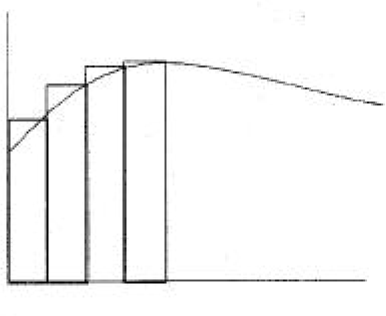
이를 그림으로 나타내면 예를 들어 구간 〔a,b〕**를** 〔0,10〕 **이라 하고 분할** P,Q**를** $P=\{0,2,4 \cdots\cdots 10\}$, $Q=\{0,1,2 \cdots\cdots 10\}$ **이라 둔다. 그림으로 간단히 나타내면 다음과 같다.**



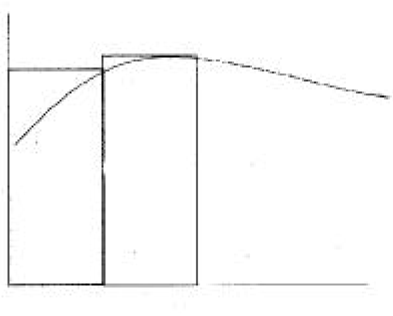
L (f : P)



L (f : Q)



U (f : Q)



U (f : P)

여기에서 상적분과 하적분의 개념을 생각해 보자.

$$L(f:P) \leq L(f:Q) \leq U(f:Q) \leq U(f:P)$$

이므로 하합들 전체의 집합을 생각할 때 임의의 상합은 하합들의 집합의 상계이고 (∵ 집합 S의 임의의 χ가 있을 때, $\chi \leq B$ 이면 B는 S의 상계), 따라서 위로 유계이다. 그러므로 상한이 존재하는데 이 상한을 f의 하적분 (lower integral)이라고 한다. 마찬가지로 상합들의 집합은 하한이 존재하며 이것을 f의 상적분 (upper integral) 이라고 한다 .이 때, 상적분은 하적분보다 작지 않다.

4> 리만합의 극한으로서의 정적분

위에서 상적분과 하적분의 개념을 말했는데, 우리가 분할을 충분히 많은 소구간으로 세분해나간다고 생각해 보자. 이 때에는 상합과 하합의 차를 얼마든지 0에 가깝게 줄여 나갈 수 있다는 것을 말한다. 즉, 이 경우에는 하적분과 상적분이 같아진다.

그리고 상적분과 하적분이 같을 때 그 같은 값을 a와 b사이에서의 함수 f에서의 함수 f의 정적분이라고 한다. 이를

$$\int_a^b f(\chi)d\chi$$

로 나타낸다.

즉, 상적분은 하적분보다 작지 않은데, 상적분과 하적분이 같을 경우 f는 [a,b]에서 리만적분가능 (Riemann integrable) 또는 적분 가능하다고 하며, 그 극한값을 f의 리만적분 (Riemann integral) 혹은 정적분 (definite integral)이라고 한다. 그리고 상적분과 하적분이 같기 위해서는 주어진 구간을 충분히 많은 구간으로 나누어야 하며, 이는 곧 리만합의 극한을 뜻한다. 즉, 리만합의 극한이 곧 정적분이 되는 것이다.

이것을 다시 설명하면 다음과 같다.

상합과 하합 사이의 차 U-L을 작게 하기 위해서는 주어진 구간 [a,b]를 미세하게 분할하면 된다.

즉 구간을 미세하게 분할하기 위해 분할점의 수를 증가시켜야 하는데, 여기에서 가 장 긴 소구간의 길이를 분할 $\chi_0, \chi_1 \cdots\cdots \chi_n$ 의 norm으로 정의한다. 그러면 norm이 0에 가까워질 때 (norm -> 0) 소구간은 동시에 더 많아지고 더 짧아진다. (∵ 가장 긴 소구간이 0에 가까워진다는 것은 다른 소구간은 더 미세하게 분할된다는 뜻) 즉,

$$\lim_{norm \to 0} (U-L) = 0$$

이고 이 때 $\lim_{norm \to 0} L = \lim_{norm \to 0} U$이다.

한편 리만합은 $S=\sum f(C_K)\triangle\chi_k$ **이고,** $L=\sum \min_k \triangle\chi_k$, $U=\sum \max_k\triangle\chi_k$ **이고**

$$L\leq S\leq U$$

이므로

$$\lim_{norm\to 0} L=\lim_{norm\to 0} S=\lim_{norm\to 0} U$$

이다. 따라서 합 S의 극한값은 L과 U 의 극한값과 같다. 즉, norm -> 0**일 때(구간을 미세하게 분할할 때) 는** C_K **를 선택하는 방법에 관계없이 언제나 같은 극한값을 얻는다. 그리고 이 경우에는 상적분과 하적분의 값이 같다.**

지금까지의 설명을 바탕으로 리만적분에 대해 정리하면 다음과 같다.

5> **리만적분**

f**가** [a,b]**에서 연속이면 (리만적분은 함수의 연속을 전제로 함),**

$$\int_a^b f(\chi)d\chi = \lim_{norm\to 0} S = \lim_{norm\to 0}\sum f(C_K)\triangle\chi_k$$

이 성립하며, 임의의 C_K **에 대해 같은 값을 갖는다.**

즉, 우리가 배운 정적분의 개념이 곧 리만적분과 같다고 할 수 있는데, 그래프 아래쪽의 면적을 구할 때 먼저 χ**축을 몇 개의 구간으로 나누고 각 소구간에서 한 점에 대한 함수값** $f(\chi)$**를 구한다. 이 때 분할된 소구간을 밑변으로 하고 함수값** $f(\chi)$**를 높이로 하면 각 소구간마다 사각형이 만들어지고 이것을 다 더하면 , 그래프 아래쪽의 면적에 대한 근사값이 된다. 그 합이 곧 리만합이며, 각 소구간의 최대값이 되는** $f(\chi)$**를 높이로 하여 각 사각형을 더한 것은 상합, 각 소구간의 최소값이 되는** $f(\chi)$**를 높이로 하여 각 사각형을 더한 것은 하합이 된다. 따라서 리만합은 상합과 하합의 사이에 존재하며, 주어진 구간을 미세하게 분할하면, 즉** norm -> 0 **이 되면 상적분과 하적분의 차** U-L**도** 0**에 가까워진다. 즉, 상적분과 하적분이 일치하게 되며, 이 때 정적분, 즉 그래프 아래의 면적이 성립하게 된다. 따라서 리만합의 극한이 곧 정적분이 되는 것이다. 리만적분은 적분가능성에 대해 말한 것으로,리만적분의 개념과 정리를 이용하여 적분가능성을 생각해 보면 다음과 같다.**

예제> **구간** [0,1]**에서 정의된 함수** $f(\chi)=0$ (χ**는 무리수)** , $f(\chi)=1$ (χ**는 유리수)는 적분가능하지 않다.**

풀이) $P=\{\chi_0, \chi_1\cdots\cdots\chi_n\}$ **을** [0,1]**의 임의의 분할이라 하면 모든 소구간** $[\chi_{i-1}, \chi_i]$**에서** $m_i=0$, $M_i=1$**이므로**

$$U(f:P) = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\triangle\chi_i=1$$

$$L(f:P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \triangle \chi i = 0$$

이다. 따라서 상적분은 1이고 하적분은 0이므로 상적분과 하적분이 일치하지 않는다. 따라서 f는 적분가능하지 않다.

Ⅱ. 르벡 적분 (Lebesgue Integral)

1. 르벡적분이란?

리만적분의 기본적인 발상은 주어진 함수의 그래프와 χ축 사이의 넓이를 구하기 위하여χ축을 잘게 자른 후 각 부분구간 위에서 직사각형의 넓이를 더하여 극한을 취하는 것이다. 이 극한이 존재하려면 작은 구간 위에서 함수값이 취하는 범위가 작아야 하고, 이는 결국 함수의 연속성에 의존하게 된다. 따라서 리만적분은 연속적인 변화량의 측정에는 적합하지만 비연속적인 변화량의 측정에는 적합하지 않다. 르벡적분의 기본적인 발상은 y축을 먼저 자르자는 것인데, 그 최대장점은 함수의 연속성에 구애받지 않는다는 점이다. 즉 르벡적분은 더 많은 적분가능한 함수들을 만들면서 리만적분의 확장을 가져왔고, 리만적분을 좀 더 포괄적으로 정의한 것이라고 할 수 있다.

2. 르벡적분의 개념

1> 잴 수 있는 집합과 측도

전체 길이가 $\varepsilon > 0$ 보다 작게 되는 구간들의 유한 혹은 가산개의 합집합에 포함되는 실수직선상의 집합은 측도 0을 가진다. 어떤 유한집합의 측도는 0이지만, 유리수의 집합이나 다른 많은 무한집합도 측도 0을 가진다. 르벡은 유계인 함수가 리만적분가능이 될 필요충분조건은 불연속인 점의 집합이 측도 0임을 보였다.

2> σ- 대수와 양의 측도

<정의1> X를 하나의 집합이라 하자 . X의 부분집합들의 모임 μ이 다음의 성질을 만족하면 X에서 σ- 대수(σ- algebra)라 불리어진다.

i) $\phi \in \mu$이다.

ii) $A \in \mu$이면 $A' \in \mu$이다.

iii) n= 1,2 …에 대해서 $A_n \in \mu$이면 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mu$이다.

<정의2> μ를 X에서 σ- 대수라 하자. μ에서 〔0,∞〕에로의 함수 μ가 다음의 조건을 만족하면 μ를 μ상에서의 양의 측도 (positive measure)라고 부른다.

i) 적어도 하나의 집합 $A \in \mu$에 대해서 $\mu(A) < \infty$이고,

ii) n= 1,2 …에 대해서 $A_n \in \mu$이고 모든 i,j(i≠j) 에 대해서 $A_i \cap A_j = \phi$이면

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$ 이다.

3> **가측함수**

<**정의**>

σ- 대수 μ을 갖는 X에서 〔-∞,∞〕에로의 함수 f를 모든 개집합 V ⊂ 〔-∞, ∞〕에 대해서 $f^{-1}(V) \in \mu$이면 μ에 관한 X상에서 확장된 실가측함수라 부른다.

4> **르벡적분가능** (Lebesgue integrable)

f를 X상에서 가측함수라 하고 f^+와 f^-가 가측이고 음이 아닌 함수일 때는 $\int_X f^+ d\mu$와 $\int_X f^- d\mu$가 정의된다. 수 $\int_X f^+ d\mu$와 $\int_X f^- d\mu$중에 적어도 하나가 유한이면, μ에 관한 X위에서 f의 적분을

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

로 정의한다.

이 때 $\int_X f^+ d\mu$와 $\int_X f^- d\mu$가 다같이 ∞이면 $\int_X f d\mu$는 정의되지 않는다. $\int_X f^+ d\mu$와 $\int_X f^- d\mu$가 다같이 유한이면 $\int_X f d\mu$는 유한이고 이 경우에 f는 μ에 관한 X의 상에 Lebesgue 적분가능이다 라고 말한다.

Taylor 급수

주어진 함수 $f(x)$가 $x-a$ 에 관한 거듭제곱급수

$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \cdots$ 으로 표현될 수 있을 때 상수 $C_0, C_1, C_2, \cdots C_n$ 을 구할 수 있는가? 구할 수 있다면 어떤 x에 대하여 이 상수들을 구할 수 있는가 하는 문제에 관하여 논하자. 거듭제곱급수 표현이 존재한다면 ,

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + 4C_4(x-a)^3 + \cdots$$
$$f''(x) = 2!C_2 + 3!C_3(x-a) + 4 \cdot 3C_4(x-a)^2 + \cdots$$
$$f^{(3)}(x) = 3!C_3(x-a) + 4!C_4(x-a) + 5 \cdot 4 \cdot 3C_5(x-a)^2 + \cdots$$
$$\vdots$$

$x=a$를 대입하고, C_n 에 관하여 풀면 다음을 얻는다.

$$C_0 = f(a), \quad C_1 = f'(a), \quad C_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad C_3 \frac{f^{(3)}(a)}{3!}, \quad \cdots, \quad C_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

따라서 계수 C_n을 함수 f로부터 결정할 수 있다. 이때 C_n은 유일하다. 이상을 요약하여 다음 정리가 얻어진다.

(유일성 정리) 함수 f가 a를 포함하는 어떤 구간 내의 모든 점 x에 대하여

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \cdots$$

을 만족하면 $C_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

이다. 따라서 $(x-a)$에 관한 함수 f의 거듭제곱급수의 표현은 유일하다.

위 유일성정리에서 $(x-a)$에 관한 함수 f의 거듭제곱급수를 f의 $x=a$에서의 **Taylor** 급수라 하고, 특히 $a=0$일 때 즉 x에 관한 거듭제곱급수를 **Maclaurin** 급수라 한다.

(나머지항을 갖는 Taylor 공식) 점 a를 포함하는 개구간 I 위에서 정의된 함수 f가 $(n+1)$개의 도함수를 갖는다고 하자. 이때 임의의 점 $x \in I$ 에 대하여

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

이다. 여기서 나머지항 (또는 오차) $R_n(x)$는

$$R_n(x) = \frac{f^{((n+1))}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

이며, c 는 x 와 a 사이의 적당한 점이다.

(증명) 임의의 자연수 $n \in N$에 대하여, 함수 $R_n(x)$을

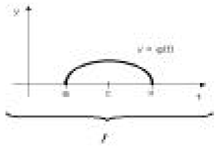
$$R_n(x) = f(x) - f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

으로 정의하자. R_n**이 구간** I**위에서 정의된다면**, x**를 상수로 생각하여** I **위에서 정의된 새로운 함수** g**를 다음과 같이 정의한다**.

$$g(t)=f(x)- f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n -$$

$$R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \quad ,$$

그러면 $g(x) = 0$**이고**, $R_n(x)$**의 정의에 의하여** $g(a) = 0$**이다**.



[**그림** 11-9]

따라서 Rolle **정리에 의하여** $g'(c) = 0$**을 만족하는 점** c**가** a**와** x **사이에 존재한다**. g(t)**를 미분하여**

$$g'(t)= -\frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n + R_n(x)(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

을 얻는다. $g'(0)\geq$**이라 놓으면** $R_n(x)$**에 대한** Taylor **공식을 얻는다**.

Taylor급수의 수렴성

함수 f'**를 구간** $(a-r,\ a+r)$**에서 모든 계수의 도함수가 존재하는 함수라 하자**. **구간** $(a-r,\ a+r)$**위에서** Taylor**급수**

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots\cdots$$

이 함수 f**를 나타내기 위한 필요충분조건은**

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

이다. **여기서** $R_n(x)$**는** Taylor **급수의 나머지 합이다**. **즉**,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad C \in (a-r,\ a+r)$$

(증명)Taylor 공식에 의하여

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = R_n(x)$$

이므로 원하는 결과를 명백히 구할 수 있다.

임의의 점에 대한 테일러 급수

함수f가 테일러 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 식1)

을 갖기 위해서는 f는 0에서 미분가능하고, 0을 포함하는 열린 구간에서 정의되어야 한다.

때문에 $f(x)=\text{In } x$ 인 경우 식1)과 같은 형태의 테일러 급수를 구하는 것은 불가능하다. 그러나 In(1+x)에 관한 테일러 급수는

$$\text{In}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1}, \quad -1 < x < 1 \quad \text{식2)}$$

임을 알 수 있다.$0<x<2$ 이면 $-1<x-1<1$ 이므로, 식2)로부터

$$\text{In } x = \text{In}(1+(x-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^{n+1} \quad 0<x<2 \quad \text{식3)}$$

식3)역시 멱급수지만 x의 멱대신에 $(x-1)$의 멱을 포함하고 , 수렴구간도 0대신 1에 중심되어 있다.

일반적으로, 실수 a에 대하여 $x-a$에 대한 멱급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n \quad \text{식4)}$$

으로 함수를 전개하고자 한다. 보통의 멱급수에 관한 모든 결과들이 식4)에 주어진 형태의 멱급수에 대하여도 모두 성립한다. 특히, f가 a에서 모든 차수의 도함수를 가지면

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

을 a에 대한 f의 테일러 급수라 한다.

a에 대한 f의 n 차 테일러 다항식과 n 차 다항식 나머지는

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

과

$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ 로 각각 정의되고, $a < t_x < x$ 이면

$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ 임은 쉽게 증명된다. 또한, $a-R<x<a+R$에서

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n+1}$ 이기 위한 필요충분조건은 $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

이항급수

임의의 급수 s에 대하여 $f(x)$는 $(1+x)^s$라 하자. $n\geq 1$ 에 대해

$\binom{s}{0}=1, \binom{s}{n}=\frac{s(s-1)\cdots(s-(n-1))}{n!}$

로 정의된 이항계수 $\binom{s}{n}$을 사용하면 f의 테일러 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}x^n \quad \begin{array}{l} -1<x<1,\ s\leq -1 \\ -1<x\leq 1,\ -1<s<0 \\ -1\leq x\leq 1,\ s>0,\ s\notin Z \\ x\in R,\ s\in Z^+\cup\{0\} \end{array}$$

을 구할 수 있는데, 이 급수를 이항급수(binomial series)라 한다. 이항급수에 관하여 다음이 성립한다.

$$(1+x)^s=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}x^n$$

예를 들면,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)x^3+\cdots$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n}$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)x^4-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^6+\cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^n$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)x^3+\cdots.$$

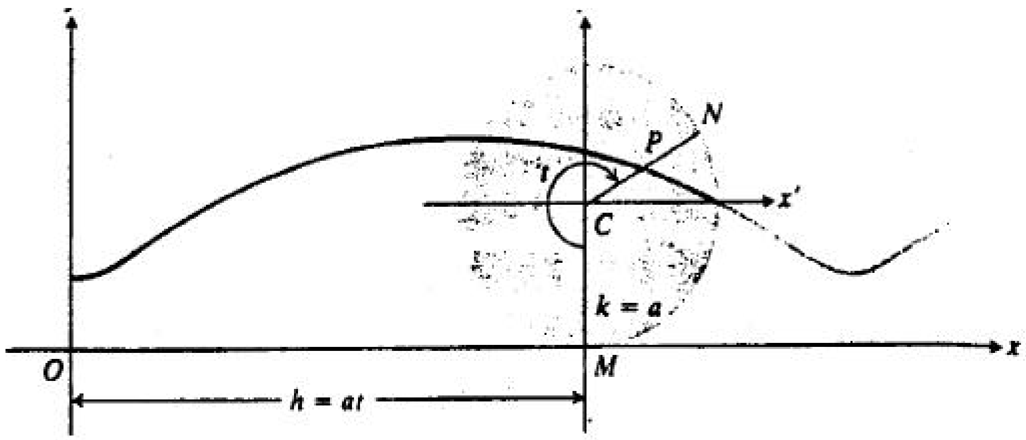
싸이클로이드와 최단 강하

◎ 싸이클로이드(Cycloids)...... 란 말은 수학과 학생이나 물리과 학생이라면 한 번 정도 들어봄직한 말이다. 우리는 우리의 생활속에 은연중에 쓰이는 싸이클로이드의 성질、특성을 잘 모르고 있다. 이 단원에서 싸이클로이드에 대한 이해를 도모하고자 한다.

▶ 싸이클로이드(Cycloids)란 무엇인가?

원이 평지를 미끄럼 없이 굴러갈 때 원주 위의 한 점이 움직이는 모양을 말한다.

<그림1> 싸이클로이드의 좌취와 좌표나타내기...



xy평면상에서 중심C의 좌표는 h=at, k=a --------------- (1)

x=h+x' , y=k+y' --------------- (2)

$x' = b\cos\theta$, $y' = b\sin\theta$

x'= -b sin t , y'= -b cost ----------- (3)

x = at - a sin t , y = a - a cos t ----------- (4)

▶ 싸이클로이드의 종류

(1) 에피싸이클로이드(epicycloid)

;외파선, 외싸이클로이드라고 한다. 반지름 a의 정원의 바깥쪽을 그 둘레에 따라서, 반지름 b의

원이 미끄러지는 일없이 굴러 움직일 때, 이 전원의 둘레 위의 일점 p가 그리는 도형의 곡선을
외싸이클로이드라 한다.

⑵ **하이포싸이클로이드**(hypocycloid)
;**내싸이클로이드, 내파선이라고 한다. 반지름 a인 일정 원둘레의 안쪽을 따라, 반지름 b(b<a)인**
원이 미끄러짐 없이 움직일 때, 이 구르는 원의 원주위의 한점 p가 그리는 도형의 곡선을 하이
포싸이클로이드라 한다.

▶ **문제) 도대체 싸이클로이드와 포물선의 곡선과 무슨 차이가 있는거지?**
또, 싸이클로이드와 원의 곡선의 차이가 뭡니까?
그리고 포물경은 어디에서 쓰이는가?

정답) 싸이클로이드와 포물선은 이 곡선을 얻는 방법이 다른데 싸이클로이드는 원이 평지를 굴러 갈
때 원주위의 한 점이 움직이는 모양을 말하고 포물선은 원뿔을 비스듬하게 잘랐을 때 나오는 곡선을
말합니다.

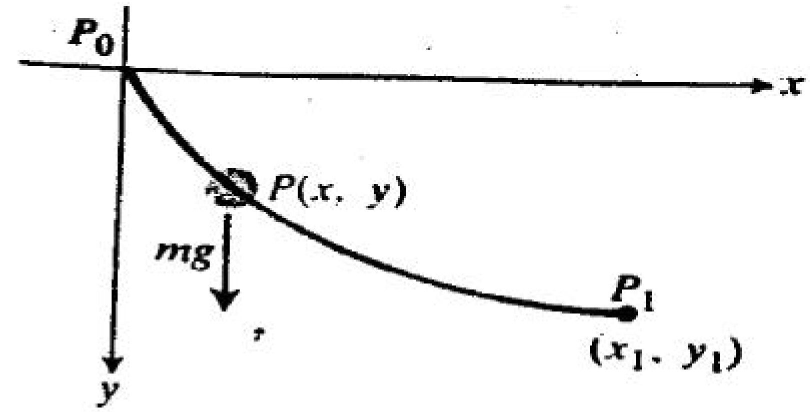
원의 곡선이라는 것은 아마도 에피싸이클로이드(Epicycloid) 또는 하이포싸이클로이드(Hypocycloid)를 말씀하시는 것 같습니다. 이 곡선을 만드는 방법은 싸이클로이드와 비슷하지만 원을 평지가 아니라 또다른 원의 바깥이나 안쪽에 밀착하여 원 주위를 움직였을 때 원주위의 한 점이 움직이는 모양을 그리면 됩니다.

그리고 포물경은 접시 안테나등에 많이 이용되는데 포물선의 원리를 이용해서 만든 것입니다. 포물경은 평행하게 오는 빛이나 전파를 초점에 모아주기 때문에 약한 전파를 많이 모아 강한 전파를 만들어 낼 수 있습니다. 또한 이 원리를 이용하면 멀리 떨어진 곳에도 불을 붙일 수 있습니다.

▶ **싸이클로이드의 최단 강하**

최속강하선이라고도 한다. 중력에만 의존하는 물체가 가장 짧은 시간에 두 점 사이를 마찰없이 미끄러지며 지나가는 이상적인 궤도(그림 참조). 이런 궤도를 찾는 문제는 17세기 후반 스위스의 수학자 야코프 베르누이가 상금을 걸고 내놓았다. 고트프리트 빌헬름 라이프니츠와 아이작 뉴턴, 그리고 다른 사람들과 함께 그와 그의 동생 요한 베르누이는 그 곡선의 싸이클로이드임을 알아 냈다.

<그림2>싸이클로이드(뒤집어진)를 좌표축에 나타내기.



<삽입> 그림2에대한 증명을 수식으로 표현한

$$T_1 = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}}$$

$$T_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(1 - \cos t)}}\,dt = t_1\sqrt{\frac{a}{g}}$$

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

$$\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ag(\cos t_0 - \cos t)}}\,dt = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\,dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(t/2)}{[2\cos^2(t_0/2) - 1] - [2\cos^2(t/2) - 1]}}\,dt \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin(t/2)\,dt}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t=t_0}^{t=\pi} \frac{-2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad \begin{pmatrix} u = \cos(t/2) \\ -2du = \sin(t/2)\,dt \\ a = \cos(t_0/2) \end{pmatrix} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\sin^{-1}\frac{u}{a}\right]_{t=t_0}^{t=\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\sin^{-1}\frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)}\right]_{t_0}^{\pi} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}(-\sin^{-1}0 + \sin^{-1}1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.
\end{aligned}$$

▶ 문제) 이 세상에서 가장 빨리 떨어지는 미끄럼틀을 만들려고 한다. 미끄럼틀 곡선을 어떤 모양으로 하면 좋을까요?

정답) 싸이클로이드...

이런 문제가 한 수학체험전 문제로 나왔다고 한다. 우리는 대게 미끄럼틀이 직선 모양이면 가장 빠른 속도로 내려갈 수 있다고 생각한다. 하지만 이것은 잘못 된 생각이다. 이것을 증명하는 과정은 물리 과목에서도 등장한다.

▶ 문제) 그럼 왜 싸이클로이드 모양의 미끄럼틀이 가장 빠를까?

정답) 싸이클로이드모양의 미끄럼틀과 직선 모양의 미끄럼틀을 비교해 보자. 둘다 똑같은 높이라면 위치 에너지는 같다. 위치에너지의 감소량은 운동에너지의 증가량과 같다. 이건 곧 밑에 도착했을 때의 속도가 미끄럼틀의 모양과 상관 없이 같다는 것을 의미한다. 그럼 어떤 모양의 미끄럼틀일 때 내려오는 시간이 가장 빠를까? 그건 싸이클로이드 모양일 때이다. 맨 처음의 가속도가 최고이다가 점점 가속도가 감소한다.

반면에 직선이라면 등가속도 운동을 한다. 결국 직선에서 서서히 속도가 증가할 동안 싸이클로이드에서는 한 번에 팍 증가해서 나중이 되어도 서서히 증가한다. 그러므로 싸이클로이드 모양일 때 가장 빠른 시간 안에 내려온다.