

이 노트의 내용은 기초 해석학과 다변수 해석학의 내용에 이어지는 것입니다.

1. 복소수 체계

실수들의 집합 $\mathbb{R}$ 는 덧셈과 곱셈에 대하여 체(field)이다. $n > 1$ 일 때 $\mathbb{R}^n$ 은 $\mathbb{R}$ 위에서의 벡터공간으로서, 덧셈연산에 대하여 군(group)이지만 곱셈연산은 가지고 있지 않다. 그러나 $n = 2$ 인 경우, 즉 $\mathbb{R}^2$ 에서는 적절한 곱셈을 정의할 수 있다.

정의 1.1 벡터공간 $\mathbb{R}^2$ 에서

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

로서 곱셈을 정의할 수 있다. 이러한 곱셈이 주어진 공간 $\mathbb{R}^2$ 는 체가 된다. 이 공간을 $\mathbb{C}$ 로 표기하고 그 원소를 **복소수**라고 부른다.

참고로 (a, b) 의 곱셈에 대한 역원은

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

이다. [$n > 2$ 인 경우에는 $\mathbb{R}^n$ 이 체가 되도록 곱셈을 정의할 수 없음이 알려져 있다.] $(0, 1)$ 을 i 로 표기하고 $x \in \mathbb{R}$ 와 $(x, 0)$ 을 동일시하면 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 가 된다. 따라서 임의의 복소수 (a, b) 에 대하여 실수 a, b 가 각각 유일하게 존재하여

$$(a, b) = a + bi$$

로 쓸 수 있다. 또한 $i^2 = -1$ 이다. $\mathbb{C}$ 는 $\mathbb{R} \cup \{i\}$ 를 포함하고 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있는 가장 작은 체계이다. i 를 도입함으로써 방정식 $x^2 + 1 = 0$ 을 풀 수 있게 되며, 그뿐만 아니라 모든 다항방정식의 해의 존재를 보장할 수 있게 된다.

a 와 b 가 실수일 때 $z = a + bi$ 에 대하여 z 의 **실수부**를 $\operatorname{Re} z = a$ 로 정의하며 z 의 **허수부**를 $\operatorname{Im} z = b$ 로 정의한다. 또한 z 의 **켈레복소수**를 $\bar{z} = a - bi$ 로 정의하며 z 의 **절댓값**을 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 로 정의한다. 절댓값은 **모듈러스** 또는 **크기**라고 불리기도 한다.

정리 1.2 복소수의 실수부, 허수부, 절댓값에 대하여 다음이 성립한다.

- (1) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$.
- (2) $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- (3) $|z|^2 = z \bar{z}$,
- (4) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$,
- (5) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- (6) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$,
- (7) $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$,
- (8) $\overline{\left(\frac{z}{w} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$,
- (9) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

증명 (1)~(8)은 정의에 의하여 자명하다. 또한 (9)는 $\mathbb{R}^2$ 에서의 삼각부등식에 의하여 성립한다. ■

함수 $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ 는 실직선으로부터 $\mathbb{R}^2$ 의 단위원으로의 주기 2π 인 함수가 된다. 복소수 표기법으로 이 함수는

$$\theta \mapsto \operatorname{cis} \theta := \cos \theta + i \sin \theta$$

로 표기한다. 영이 아닌 임의의 복소수 z 에 대하여, 양수 r 와 법 2π 에 대하여 합동인 실수 θ 가 각각 유일하게 존재하여 $z = r \operatorname{cis} \theta$ 로 표현된다. $0 = 0 \operatorname{cis} \theta$ 로 표현되는데, 이때 θ 는 임의의 실수이다. 관계 $z = r \operatorname{cis} \theta$ 에서 대응 $z \mapsto r$ 는 $r = |z|$ 인 함수이다. 그리고 대응 $z \mapsto \theta$ 는 $\theta = \arg z$ 로 나타낸다. 참고로 $z \neq 0$ 일 때 $\arg \theta$ 는 법 2π 에 대하여 합동인 값들이다. [$\arg 0$ 은 임의의 실수이다.] $\arg z$ 의 값들 중 $(-\pi, \pi]$ 에 속하는 것을 택함으로써 $\arg$ 를 정의할 수 있다. 참고로

$$z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1, z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$$

일 때

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

가 된다. 또한

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

이다. 특히

$$i \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

이므로 i 를 곱하는 것은 복소평면의 점을 원점을 중심으로 $\pi/2$ 만큼 회전시키는 변환이 된다. 복소수 $r \operatorname{cis} \theta$ 를 곱하는 것은 원점을 중심으로 θ 만큼 회전시키고 r 배 확대시키는 변환이다. 더욱이 $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ 이다. 영이 아닌 임의의 복소수 z 는 n 개의 n 제곱근을 가진다. 즉 $r \operatorname{cis} \theta$ 의 n 제곱근은

$$\sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

이다.

이번에는 복소평면에서의 원과 직선에 대하여 살펴보자. 중심이 $a \in \mathbb{C}$ 이고 반지름이 $r > 0$ 인 원의 방정식은 $|z - a| = r$ 이다. $0 \neq b \in \mathbb{C}$ 이면 원점을 지나고 방향이 b 인 직선은 $tb, t \in \mathbb{R}$ 인 꼴의 점들로 구성된다. 그러한 직선의 방정식을

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z}{b} \right) = 0$$

으로 나타낼 수도 있다. $t \in \mathbb{R}$ 이고 $c > 0$ 이면

$$(t + ci)b = tb + cib$$

는 직선 tb 의 왼쪽 반평면 위의 점들을 나타내게 된다. 그러한 반평면은

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \left(\frac{z}{b} \right) > 0 \right\}$$

으로 나타낼 수 있다.

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) > 0 \right\}$$

은 앞의 반평면을 a 만큼 평행이동한 반평면이 된다. 즉 점 a 를 지나고 b 와 평행한 직선의 왼쪽에 있는 점들로 이루어진 반평면이다.

$\mathbb{R}^3$ 의 단위구면에서 북극점을 뺀 곡면과 복소평면 사이이 일대일 대응을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$z \leftrightarrow \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \quad x_1 = \frac{2\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{2\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

확장복소평면을 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 로 정의하면 위 대응은 $\mathbb{R}^3$ 의 단위구면 S 와 $\mathbb{C}_\infty$ 사이의 일대일 대응이 된다. 이때 $\mathbb{C}_\infty$ 에서의 거리함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}, \quad d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

2. 복소함수의 미분

함수 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 의 정의역 또는 치역이 허수를 포함할 때 f 를 **복소함수**라고 부른다.

복소수 집합 $\mathbb{C}$ 는 $\mathbb{R}^2$ 와 거리동형이다. 따라서 $\mathbb{C}$ 에서 수열의 극한, 함수의 극한, 연속성은 $\mathbb{R}^2$ 에서와 동일하게 정의된다. 예를 들면 복소함수 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 가 a 에서 연속이라는 것은

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: [|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon]$$

을 만족시키는 것을 의미한다.

복소수는 나눗셈이 정의되기 때문에 복소함수의 미분의 정의는 벡터함수의 미분의 정의보다는 실함수의 미분의 정의와 비슷하다.

정의 2.1 즉 복소함수 f 가 점 a 의 근방에서 정의되어 있고 극한

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면 f 는 a 에서 **미분 가능**하다고 말하고 $f'(a)$ 를 a 에서 f 의 **미분계수**라고 부른다. 또한 f' 을 f 의 **도함수**라고 부른다.

한 점에서의 미분을 논할 때에는 항상 함수가 그 점의 한 근방에서 정의되어 있다고 가정한다.

미분의 응용 결과는 실함수의 미분과 복소함수의 미분의 성질이 다른 경우가 많다. 그러나 미분의 계산에 관한 기본 성질은 동일하다. 먼저 미분 가능성은 연속성을 함의한다. 또한 f 와 g 가 a 에서 미분 가능하면 $f+g$, $f-g$, fg 도 a 에서 미분 가능하며, $g(a) \neq 0$ 이면 f/g 도 a 에서 미분 가능하고, 이들 함수의 미분 공식은 실함수의 경우와 동일하다. f 가 a 에서 미분 가능하고 g 가 $f(a)$ 에서 미분 가능하면 $g \circ f$ 는 a 에서 미분 가능하며 연쇄법칙이 성립한다. f 가 a 에서 연속이고 g 가 $f(a)$ 에서 연속이며 a 의 한 근방에서 $g(f(z)) = z$ 가 성립하고 $g'(f(a))$ 가 존재하면 $f'(a)$ 가 존재하고 그 값은 $1/g'(f(a))$ 와 같다.

정의 2.2 f 가 $\mathbb{C}$ 의 열린부분집합 G 위에서 정의되었다고 하자. 만약 f 가 G 에서 미분 가능하고 f' 이 G 에서 연속이면, f 는 G 위에서 **해석적**이라고 말한다. Q 가 $\mathbb{C}$ 의 부분집합이고 f 가 Q 를 포함하는 한 열린집합 위에서 해석적일 때 f 는 Q 위에서 **해석적**이라고 말한다. $a \in \mathbb{C}$ 이고 f 가 a 를 포함하는 한 열린집합 위에서 해석적일 때 f 는 점 a 에서 **해석적**이라고 말한다.

참고 G 가 열린집합이고 f 가 G 의 모든 점에서 미분 가능하면 f 는 G 의 각 점에서 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다. 이것은 복소함수와 실함수의 큰 차이이다. 이 내용은 뒤에서 증명할 것이다.

정리 2.3 복소함수의 멱급수는 수렴영역 내에서 항별로 미분 가능하다.

증명 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

이 수렴반경 R 를 가진다고 가정하자. 그러면 이 급수의 형식적 미분은

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-a)^n$$

이다. 이때

$$(z-a) \sum_{n=0}^N a_{n+1} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{N+1} a_n (z-a)^n - a_0$$

이므로 $N \rightarrow \infty$ 일 때 양변의 수렴 여부는 일치한다. 즉 복소 멱급수와 그 형식적 미분은 동일한 수렴반경을 가진다. 따라서 멱급수는 수렴반경 내에서 임의의 횟수로 미분 가능하다.

이제 논의를 단순하게 하기 위해 중심이 원점인 멱급수

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

을 생각하자. 수렴반경이 R 이고 $|z_0| < R$ 라고 하자. $\epsilon > 0$ 이 임의로 주어졌다고 하자.

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad s_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n, \quad r_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

이라고 하자. 그러면

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) \right| \leq \left| \frac{s_N(z) - s_N(z_0)}{z - z_0} - s'_N(z_0) \right| + |s'_N(z_0) - g(z_0)| + \left| \frac{r_N(z) - r_N(z_0)}{z - z_0} \right| =: T_1 + T_2 + T_3$$

이다. 여기서 $s'_N(z_0)$ 은 $g(z_0)$ 의 부분합이므로 충분히 큰 N 과 임의의 z 에 대하여 $T_2 \leq 3^{-1}\epsilon$ 이 성립한다. 또한

$$\frac{r_N(z) - r_N(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$$

이다. $|z_0| < r < R$ 인 r 에 대하여 $|z| < r$ 라고 하면

$$\left| a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| = |a_n| |z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \dots + z_0^{n-1}| \leq a_n n r^{n-1}$$

이 성립한다. $\sum a_n n r^{n-1}$ 이 수렴하므로 충분히 큰 N 과 $|z| < r$ 인 모든 z 에 대하여 $T_3 < 3^{-1}\epsilon$ 이 성립한다. 두 조건을 모두 만족시키는 자연수 N 을 택하자. s_N 이 미분 가능하므로 z_0 에 충분히 가까운 모든 점 z 에 대하여 $T_1 \leq 3^{-1}\epsilon$ 이 성립한다. ■

복소함수 f 가

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

으로 표현될 때, 수렴영역 내부에서

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

이 성립한다. 수학적 귀납법을 이용하면

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) (z-a)^{n-k}$$

를 얻는다. 따라서 $a_n = f^{(n)}(a)/n!$ 이라고 하면

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

로서 f 의 거듭제곱급수는 Taylor 급수와 동일함을 알 수 있다.

3. 기본 함수

거듭제곱급수를 이용하여 지수함수를 정의할 수 있다. 즉

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

으로 정의한다. Cauchy-Hadamard 공식을 이용하면 이 급수는 임의의 복소수 z 에 대하여 수렴한다는 것을 알 수 있다. 이제 위 함수를 e^z 로 나타내기로 하자.

보조정리 영역에서 도함수가 0인 복소함수는 상수함수이다.

증명 f 가 영역 G 에서 미분 가능하고 $f' = 0$ 이라고 하자. 그리고 $p \in G$ 라고 하자. 영역은 연결집합이므로 임의의 $z \in G$ 는 p 와 다각선으로 연결된다. 각 선분 위에서 평균값 정리를 적용하면 f 가 상수함수가 됨을 알 수 있다. 따라서 $f(p) = f(z)$ 이므로 f 는 상수함수이다. ■

이 사실을 이용하여 항등식 $e^z e^{a-z} = e^a$ 를 유도할 수 있다.

이번에는 삼각함수를 정의해보자. $f(z) = e^{iz}$ 일 때 $f''(z) = i^2 f(z) = -f(z)$ 이므로

$$f''(z) + f(z) = 0$$

이다. 그리고 $f(0) = 1$, $f'(0) = i$ 이다. 이 초기 조건을 만족시키는 미분방정식의 해는

$$f(z) = \cos z + i \sin z$$

이다. 또 다른 해를 $g(z)$ 라고 하고 $u = f - g$ 라고 하면

$$u''(z) + u(z) = 0, u(0) = 0 = u'(0)$$

이므로 u 의 실수부와 허수부가 모두 0이 된다. 따라서 미분방정식의 해가 유일하므로

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

이다. 이 식의 z 를 $-z$ 로 바꾸고 이 식과 연립하면

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

를 얻는다.

이 식을 이용하면 다시

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} [\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)]$$

를 얻는다.

이제 로그함수를 정의하자. $x \neq 0$ 일 때 $\exp z = w$ 의 가장 일반적인 해는 $z = \ln|w| + i \arg w + 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$ 이다. $e^z = 0$ 의 해는 없다.

정의 3.1 G 가 열린집합이고 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 가 연속이며 $e^{f(z)} = z$ 를 만족시키면 f 를 G 위에서의 **로그의 분지(branch)**라고 부른다.

참고 $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ 일 때를 **주분지(principal branch)**라고 부르고 $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ 일 때를 **나선분지(spiral strip)**라고 부른다. 별도의 언급이 없으면 로그함수는 주분지를 의미하는 것으로 약속한다.

역함수의 미분 공식에 의하여 로그의 분지는 해석적이며

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}$$

이다. 로그의 분지는 $z^b := e^{b \ln z}$ 의 분지를 제공한다.

로그의 분지를 다른 것으로 택하면 $\ln z$ 의 값은 $2\pi i n$ 만큼 달라진다. 따라서 z^b 의 분지를 어느 것으로 택하느냐에 따라서 그 값은 $e^{2\pi i n b}$ 만큼 달라진다. 만약 b 가 정수이면 모든 값이 동일하다. b 가 유리수이고 분모가 d 인 기약분수이면 z^b 는 d 개의 값을 가진다.

4. 등각사상

복소평면에서 두 직선이 이루는 각이 복소함수에 의해 어떻게 변환되는지 살펴보자. 교차하는 두 직선의 상은 한 점을 공유하는 매끄러운 두 선이 되므로, 먼저 매끄러운 두 선이 이루는 각을 정의해야 한다.

복소평면에서 **경로(path)**를 연속함수 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 로 정의하자. 만약 어떤 점에서 $\gamma'(t) \in \mathbb{C}$ 이고 영이 아니면 $\gamma'(t)$ 는 $\gamma(t)$ 에서의 접벡터이므로 $\gamma'(t)$ 의 편각은 $\gamma(t)$ 에서 곡선과 수평선이 이루는 각이 된다. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 와 $\tilde{\gamma}: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 매끄러운 곡선이고 $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(\tilde{a}) = z$ 이며 $\gamma'(0) \neq 0$, $\tilde{\gamma}'(\tilde{a}) \neq 0$ 이라고 하자. 그러면 $\arg \tilde{\gamma}'(\tilde{a}) - \arg \gamma'(a)$ 는 두 곡선 사이의 각이 된다. 이제 f 에 의한 상, 즉 $\rho(t) = g(\gamma(t))$ 를 생각하자. 그러면 $\rho'(a) = f'(z)\gamma'(a)$, $\tilde{\rho}'(\tilde{a}) = f'(z)\tilde{\gamma}'(\tilde{a})$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} \arg \tilde{\rho}'(\tilde{a}) - \arg \rho'(a) &= \arg \tilde{\gamma}'(\tilde{a}) + \arg f'(z) \\ &= \arg \gamma'(a) + \arg f'(z) \end{aligned}$$

이므로 각은 크기와 부호 모두 변하지 않는다. 즉 해석적 함수는 미분계수가 영이 아닌 점에서 등각사상이 된다. [미분계수가 영이면 각을 보존하지 않을 수도 있다. 예컨대 $z \mapsto z^2$ 은 원점에서 각을 두 배로 변환시킨다.]

해석적 함수의 등각성은 해석적 함수가 z_0 의 근처에서 $f'(z_0)$ 을 곱한 일차함수처럼 행동하기 때문에 나타난다. 즉 $f'(z_0) = re^{i\theta}$ 이므로 z_0 근처에서 f 는 θ 만큼 회전시키는 변환처럼 행동한다.

반면에 $\mathbb{R}^2$ 로부터 $\mathbb{R}^2$ 로의 매끄러운 함수는 한 점의 근방에서 선형변환처럼 행동한다.

두 영역 A, B 에 대하여 일대일대응 $f: A \rightarrow B$ 가 존재하여 f 와 f^{-1} 이 모두 등각사상이 될 때, A 와 B 를 **등각동치**라고 부른다.

등각사상의 몇 가지 성질을 간단히 살펴보자.

경계의 확장 단순연결영역 A 의 경계가 닫힌단순곡선이면 이 영역으로부터 열린원판 B 로의 등각사상 $f: A \rightarrow B$ 는 $\bar{A}$ 로부터 $\bar{B}$ 로의 동위사상으로 확장될 수 있다.

등각사상의 구성 해석적 함수나 조화 함수에 관련된 해를 찾기 위한 방법으로 등각사상이 사용되기도 한다. 예컨대 Joukowski는 두 함수

$$f(z) = 2\frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

의 합성함수 $f \circ g$ 에 -1 을 지나고 1 을 내부에 포함하는 원을 대입하였다. 그 상은 날개의 횡단면과 같은 모양인 'Joukowski 프로펠러'가 되었다. 원판 위에서의 Laplace 변환의 해를 찾기 위한 방법으로 이 함수가 사용된다.

다각형으로 둘러싸인 영역도 많이 사용되는 중요한 영역이다. Schwarz-Christoffel 변환은 다각형으로 둘러싸인 영역을 원판에 대응시키는 등각사상으로서, 다각형의 꼭짓점들의 좌표를 이용하여 사상을 정의할 수 있다.

다중연결영역 하나 이상의 단순연결영역을 합집합한 것의 여집합을 다중연결영역(multiply connected region)이라고 부른다. 특히 Riemann 구면에서 서로소인 두 단순연결영역의 합집합의 여집합으로 나타나는 영역을 이중연결영역(doubly connected region)이라고 부른다. 임의의 이중연결영역 G 에 대하여 $R > 1$ 인 R 가 존재하여 G 와 고리 $1 < |z| < R$ 가 등각동치가 된다. 또한 각 영역 G 에 대하여 R 가 유일하게 결정된다. 특히 바깥반지름이 다른 두 고리영역은 서로 등각동치가 아니다.

5. Cauchy-Riemann 방정식

복소함수 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 의 정의역이 열린집합이라고 하자. 실수 x, y 에 대하여 $x+iy$ 의 함수값 $f(x+iy)$ 를 $f(x, y)$ 로 표기하자. $z = x+iy \in \Omega$ 에 대하여 $f'(z)$ 가 존재하면 $h \in \mathbb{R}$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}, \\ f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-i \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \right] = -i \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

정리 5.1 z 에서 f 가 해석적이면 z 에서 f 의 편미분이 존재하고 다음과 같은 **Cauchy-Riemann 방정식**을 만족시킨다.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

만약 실함수 u, v 에 대하여 $f = u + iv$ 이면 위 방정식은 다음과 같은 연립방정식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

이것을 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

이러한 표기법을 이용하면 Cauchy-Riemann 방정식은

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

과 동치이며, 또한

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

와도 동치이다. 따라서 f 가 Ω 위에서 해석적이면 f 의 편미분이 존재하고 편도함수는 연속이며 Cauchy-Riemann 방정식을 만족시킨다. 또한 그 역도 성립한다.

정리 5.2 Ω 위에서 f 가 Cauchy-Riemann 방정식을 만족시키는 연속인 편도함수를 가지면 f 는 Ω 위에서 해석적이다.

증명 $z = x+iy \in \Omega$ 라고 하자. $f'(z)$ 가 존재함을 증명해야 한다. $B(z, r) \subseteq \Omega$ 인 양수 r 를 택하고 $0 < |s+it| < r$ 를 만족시키는 $h = s+it$ 를 택하자. 그러면 평균값 정리에 의하여 두 조건 $|s^*| < s, |t^*| < t$ 를 만족시키는 s^*, t^* 가 존재하여

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{f(x+s, y+t) - f(x, y)}{s+it} \\ &= \frac{f(x+s, y+t) - f(x, y+t)}{s} \frac{s}{s+it} \\ &\quad + \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t} \frac{t}{s+it} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x+s^*, y+t) \frac{s}{s+it} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+t^*) \frac{t}{s+it} \end{aligned}$$

를 만족시킨다. $h \rightarrow 0$ 일 때

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+s^*, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \rightarrow 0$$

이며, 이제 편도함수에 대해서도 마찬가지로 성립한다. 더욱이

$$\left| \frac{s}{s+it} \right| \leq 1$$

이다. 따라서 $h \rightarrow 0$ 일 때 $R(h) \rightarrow 0$ 인 함수 R 가 존재하여

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{s}{s+it} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{t}{s+it} + R(h)$$

를 만족시킨다. Cauchy-Riemann 방정식을 이용하면 우변의 첫 두 항이 $(\partial f / \partial x)(x, y)$ 에 수렴함을 알 수 있다. 특히 이것은 h 에 독립적이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

를 얻는다. ■

참고로 위 정리에서 가정을 f 가 연속이고 Cauchy-Riemann 방정식을 만족시키는 편도함수를 가진다는 것으로 바꾸어도 동일한 결론을 얻을 수 있다. [이것은 Looman-Menchoff 정리이다. 증명은 Narasimhan의 Complex Analysis in One Variable을 참고하기 바란다.]

Cauchy-Riemann 방정식을 이용하면 다음 등식을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4} \Delta.$$

이것은 임의의 해석적 함수가 **조화적**(harmonic)이라는 것을 의미한다. 즉 실수부와 허수부가 서로 조화함수가 된다는 것을 의미한다. 또한 이것은 해석적 함수의 켈레함수가 (해석적아 아닐지라도) 조화적이라는 것을 보여준다.

만약 $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ 이면 u 는 조화적이다. 역으로 u 가 영역 Ω 위에서 조화적이면 u 의 **조화공액**(harmonic conjugate)이 존재할까? 즉 $f = u + iv$ 가 해석적 함수가 되게 하는 함수 v 가 존재하는가? 만약 그러한 v 가 존재한다면 v 는 실상수를 제외하고 유일하게 결정된다. 이것을 증명해보자.

먼저 정의역이 단순연결영역이라는 가정이 필요하다. 즉 영역 Ω 에 포함되는 임의의 매끄러운 닫힌단순곡선 γ 에 대하여 Ω 의 적당한 부분집합이 존재하여 γ 가 그 부분집합의 경계가 된다고 하자. 그러면 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ 가 C^1 급 벡터장일 때 보존적 벡터장의 성질에 의하여 $f = \nabla v$ 를 만족시키는 $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재할 필요충분조건은

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

이 된다. 이 등식으로부터 원하는 결과를 얻는다.

정리 5.3 단순연결영역에서 조화적인 함수는 조화공액을 가진다.

참고 단순연결이 아닌 영역에서는 조화공액이 존재하지 않을 수도 있다. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 위에서 $u = \ln|z|$ 라고 하면 $u + i \arg z$ 는 $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$ 위에서 해석적이지만 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 위의 해석적 함수로 확장되지 못한다.

6. 일차분수변환

이 장에서는 여러 가지 유용한 성질을 가지고 있는 일차분수변환을 살펴보자.

정의 6.1 a, b, c, d 가 복소수이고 $ad \neq bc$ 라고 하자. 이때 함수

$$z \mapsto S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq -\frac{d}{c}$$

를 **일차분수변환** 또는 **Möbius 변환**이라고 부른다.

참고 (1) 위 정의에서 $ad = bc$ 이면 S 는 상수함수가 된다.

(2) 계수 a, b, c, d 가 유일하게 결정되지는 않는다. 그러나 상수배 차이를 제외하고는 유일하게 결정된다.

(3) 상수가 아닌 선형 다항식은 $c=0$ 인 일차분수변환이다.

(4) $z \neq -d/c$ 이면 $S(z) \in \mathbb{C}$ 이고 $S'(z) = (ad-bc)/(cz+d)^2 \neq 0$ 이다.

(5) $S(-d/c) = \infty$ 이고 $S(\infty) = a/c$ 라고 정의할 수도 있다. 그러면 S 는 $\mathbb{C}_\infty$ 에서 그 위로의 일대일대응이 된다.

정의 6.1에서와 같이 정의된 변환 S 의 **계수행렬**을

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

로 쓴다. 만약 S 와 T 가 일차분수변환이면 $S \circ T$ 도 일차분수변환이 되며, $S \circ T$ 의 계수행렬은 S 의 계수행렬과 T 의 계수행렬을 곱한 것과 같다. 또한 일차분수변환의 역변환도 일차분수변환이 되며, 역변환의 계수행렬은 본래 변환의 계수행렬의 역행렬과 같다. $S(\infty) = a/c$, $S(-d/c) = \infty$ 라고 하자. $c=0$ 인 경우에는 $S(\infty) = \infty$ 라고 하자. 그러면 일차분수변환 S 는 $\mathbb{C}_\infty$ 로부터 그 위로로의 일대일대응이다. 이것은 역변환

$$S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$

가 존재한다는 사실에 의하여 당연하다. 더욱이 일차분수변환의 합성은 일차분수변환이므로, 일차분수변환들의 집합은 합성연산에 대한 군(group)이 된다. 만약 S 가 선형이 아닌 일차분수변환이면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{ax+b}{z+d} = a + \frac{b-ad}{z+d}$$

이것은 임의의 일차분수변환이 평행이동, 회전, 확대, 축소, 뒤집기 변환의 합성임을 의미한다. 여기서 평행이동, 회전, 확대, 축소 변환에 대해서는 잘 알고 있으므로 뒤집기 변환의 성질을 살펴보자. 뒤집기라는 것은 D 를 $\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{D}$ 에 대응시킨다는 것을 의미한다. 뒤집기 변환이 직선과 원을 직선 또는 원에 대응시킨다는 것을 밝히자.

상수 $k > 0$, $p \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$ 에 대하여 도형의 방정식

$$|z-p| = k|z-q|$$

를 생각하자. 이것을 $z = x + iy$ 로 나타내면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2[(x-c)^2 + (y-d)^2]$$

이다. 이 방정식은 $k \neq 1$ 일 때에는 원의 방정식이고 $k=1$ 일 때에는 직선의 방정식이다. 두 경우 모두 도형은 Riemann 구면 위의 원이 된다. 그 원을 C_1 이라고 하자. $1/z$ 를 z 로 치환하고 식을 변형하면

$$\left| z - \frac{1}{p} \right| = \left(k \frac{|q|}{|p|} \right) \left| z - \frac{1}{q} \right|$$

이 되는데, 이 식도 원의 방정식이다. 그 원을 C_2 라고 하자. 이로써 $1/z \in C_1 \Leftrightarrow z \in C_2$ 이므로, 뒤집기 변환은 Riemann 구면 위의 원을 원에 대응시킨다는 것을 알 수 있다. 같은 성질이 평행이동, 회전, 확대, 축소 변환에도 있으므로, 일차분수변환은 Riemann 구면에서의 원을 원에 대응시키는 성질을 가지고 있음을 알 수 있다.

참고 여기서 증명을 하진 않았지만, 일차분수변환은 다음과 같은 두 가지 성질을 가지고 있다. (1) 일차분수변환은 회전방향(orientation)을 보존한다. 즉 세 점 z_1, z_2, z_3 을 지나는 원이 일차분수변환에 의하여 대응된 원은 z_1, z_2, z_3 의 상을 지나며 방향이 동일하다. (2) 일차분수변환에 의하여 대응된 두 점은 한 원에 대하여 대칭이다. 즉 원의 중심에서 시작된 반직선 위의 점

과 그 점이 대응된 점의 중심으로부터의 거리의 기하평균은 원의 반지름과 같다.

z_2, z_3, z_4 가 $\mathbb{C}$ 의 서로 다른 세 점이라고 하자. 이 점들을 순서대로 1, 0, ∞ 에 대응시키는 뫼비우스 변환은

$$S_z = \frac{z - z_3}{z - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

로서 유일하다. 특별한 경우로서 z_i 들 중 하나가 ∞ 인 경우도 생각할 수 있다. 이 경우 $\mathbb{C}_\infty$ 의 서로 다른 세 점을 $\mathbb{C}_\infty$ 의 서로 다른 세 점에 대응시키는 일차분수변환을 생각하게 된다.

만약 두 개의 원판, 두 개의 반평면 또는 원판 하나와 반평면 하나가 주어져 있을 때, 하나를 다른 하나에 대응시키는 일차분수변환이 존재한다. 이때 각 집합의 경계점을 세 개씩 정하여 일차분수변환을 구할 수 있다.

z_2, z_3, z_4 를 1, 0, ∞ 에 대응시키는 일차분수변환에 의하여 z_1 이 대응되는 점을 $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ 로 나타내면

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

가 된다. 이 표기법에 따르면 임의의 일차분수변환 T 에 대하여 $[Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ 이다.

예를 들어 $z \mapsto (1-z)/(1+z)$ 는 복소평면에서 오른쪽 반평면을 단위원판에 대응시킨다.

7. 복소함수의 적분

복소함수의 미분은 실함수의 미분과 동일하게 정의되었다. 그러나 복소함수의 적분은 2차원 영역을 적분 영역으로 하기 때문에 실함수의 적분과 많이 다르다.

정의 7.1 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 가 구간적으로 매끄러운 곡선이고 f 가 γ 의 상 위에서 정의된 연속인 복소함수라고 하자. 이때 γ 에서의 f 의 **복소선적분**을

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

로 정의한다.

참고 위 적분은 $\sum (f \circ \gamma)(\tau_k) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]$ 에 극한을 취한 Riemann 적분, 즉 γ 에 대한 $f \circ \gamma$ 의 Riemann-Stieltjes 적분으로 정의할 수도 있으며, 그러한 정의를 이용하면 γ 가 구간 가늘한 곡선인 경우의 적분도 생각할 수 있다.

ϕ 가 $[c, d]$ 로부터 $[a, b]$ 로의 구간적으로 매끄러운 증가함수이고 $\rho = \gamma \circ \phi$ 이면, 즉 ρ 가 γ 와 상이 같지만 재매개변수화된 곡선이면 다음을 얻는다.

$$\int_{\rho} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

F 가 γ 의 근방에서 해석적인 함수이고 $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ 일 때 미적분의 기본정리에 의하여

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

가 성립한다. γ 가 닫힌곡선이면 이 적분값은 0이다. 결과적으로 $\gamma = re^{i\theta}$ 이면, $n \in \mathbb{Z}$ 이고 $n \neq -1$ 일 때

$$\int_{\gamma} z^n dz = 0$$

이다. 한편 $n = -1$ 일 때에는

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

이다.

더욱 일반적인 경우로서 $|z_0| < r$ 일 때 γ 위에서 $(z - z_0)^{-1}$ 의 적분을 계산해보자. $z_{\epsilon}^{\pm}$ 가 원 $|z - z_0| = r$ 위의 점이고

$$\arg(z_{\epsilon}^{\pm} - z_0) = \pm(\pi - \epsilon)$$

을 만족시킨다고 하자. 명백히 $\epsilon \rightarrow 0$ 일 때 $z_{\epsilon}^{\pm} \rightarrow z_1$ 이다. 여기서 z_1 은 z_0 과 동일한 허수부를 갖고 원 위에 있는 점이다. 원 위에 z_{ϵ}^{-} 에서 시작하여 z_{ϵ}^{+} 까지 잇는 경로를 γ_{ϵ} 이라고 하자. γ_{ϵ} 의 근방에서 $\ln(z - z_0)$ 은 $(z - z_0)^{-1}$ 의 원시함수이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{1}{z - z_0} dz &= \ln(z_{\epsilon}^{+} - z_0) - \ln(z_{\epsilon}^{-} - z_0) \\ &= \ln r + i(\pi - \epsilon) - \ln r + i(\pi - \epsilon) \end{aligned}$$

이다. 여기에 $\epsilon \searrow 0$ 인 극한을 취하면

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

를 얻는다.

8. 원판에서의 Cauchy의 정리

앞서 $(z - z_0)^{-1}$ 의 적분을 살펴보았다. 이 식의 분자가 1이 아닌 해석적 함수일 때의 적분을 살펴보자.

정리 8.1 f 가 경로 γ 에 의하여 둘러싸인 원판 위에서 해석적이면 원판의 임의의 내점 z 에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

이 명제를 원판 위에서 **Cauchy 적분 공식**이라고 부른다.

증명 함수 g 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(t) = \int_{\gamma} \frac{f(z + t(w - z))}{w - z} dw.$$

그러면

$$g'(t) = \int_{\gamma} f'(z + t(w - z)) dw$$

이다. $F(w) = f(z + t(w - z))/t$ 가 $f'(z + t(w - z))$ 의 원시함수이므로 $g'(t) \equiv 0$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = g(1) = g(0) = f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i f(z). \quad \blacksquare$$

따름정리로서 다음 정리를 얻는다.

정리 8.2 f 가 경로 γ 에 의하여 둘러싸인 원판 위에서 해석적이면 다음이 성립한다.

$$\int_{\gamma} f(w)dw = 0.$$

이 명제를 원판 위의 **Cauchy의 정리**라고 부른다.

증명 원판의 내점 z 를 고정시키고 함수 $w \mapsto f(w)(w-z)$ 에 Cauchy 적분 공식을 적용하면 결과를 얻는다. ■

이제 해석적 함수는 정의역의 각 점의 근방에서 거듭제곱급수로 나타낼 수 있음을 증명하자.

정리 8.3 f 가 $B(a, R)$ 에서 해석적이면 복소수열 $\langle a_n \rangle$ 이 존재하여 $|z-a| < R$ 인 z 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

증명 z 를 고정시키고 $|z-a| < r$ 인 $r < R$ 를 택한다. γ 가 원 $|w-a|=r$ 를 둘러싸는 경로라고 하자. $|(z-a)/(w-a)| < 1$ 이므로 M -판정법에 의하여 $|w-a|=r$ 인 w 에 대하여 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n = \frac{1}{w-z}$$

은 절대수렴하고 균등수렴한다. f 가 원 위에서 유계이므로 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n = \frac{f(w)}{w-z}$$

의 수렴에 대해서도 마찬가지로 성립한다. 따라서 합과 적분을 교환하여

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right] (z-a)^n$$

을 얻는다. 여기서

$$a_n = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

라고 하면 원하는 결론을 얻는다. ■

따름정리 동일한 조건 아래에서 다음 등식이 성립한다.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

따름정리 f 가 $B(a, R)$ 에서 해석적이면 다음이 성립한다.

$$|f^{(n)}(a)| \leq R^{-n} n! \max\{|f(z)| \mid z \in B(a, R)\}$$

이 부등식을 **Cauchy의 부등식**이라고 부른다.

증명 R 를 R 보다 작은 값 r 로 바꾸면 명백히 성립한다. 그 후에 $r \nearrow R$ 인 극한을 취하면 정리의 부등식을 얻는다. ■

따름정리 영역에서 해석적인 함수가 그 영역의 내점에서 최대 절댓값을 가지면 그 함수는 그 영역에서 상수함수이다. 이 명제를 **최대절댓값 정리**라고 부른다.

증명 $n=0$ 인 경우의 Cauchy 부등식에 의하여, 한 점에서 최대절댓값을 갖는 함수 f 는 그 점을 포함하는 원판 위에서 상수함수이다. 따라서 최대절댓값을 갖는 점들의 모임은 열린집합이

다. 또한 f 가 연속이므로 최대절댓값을 갖는 점들의 모임은 한 점의 역사상으로서 닫힌집합이다. 따라서 f 는 영역의 전체에서 최대절댓값을 가진다. 즉 $|f|$ 가 상수함수이다. Cauchy-Riemann 방정식에 의하여 f 도 상수함수가 된다. ■

참고 복소평면 전체에서 해석적인 함수를 **정함수**라고 부른다.

따름정리 유계인 정함수는 상수함수이다. 이 명제를 **Liouville의 정리**라고 부른다.

증명 Cauchy 부등식에서 $n=1$ 일 때 $f' \equiv 0$ 을 얻는다. ■

따름정리 상수가 아닌 다항식은 $\mathbb{C}$ 에서 영점을 가진다.

정리 8.4 복소함수 f 가 영역 G 에서 해석적이고 항등적으로 영이 아니면 모든 n 에 대하여 $f^{(n)}(a) \neq 0$ 인 a 는 그 영역에 존재하지 않는다.

증명 그러한 점 a 들의 모임은 닫힌집합이다. Taylor 급수를 이용하면 그러한 집합은 열린집합이다. ■

따름정리 f 가 영역 Ω 에서 해석적이고 항등적 영이 아니면, 각 $a \in \Omega$ 에 대하여 유일한 자연수 p 와, a 의 근방에서 해석적이고 a 에서 영이 아닌 함수 g 가 존재하여 $f(z) = (z-a)^p g(z)$ 를 만족시킨다.

증명 $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ 이라고 하면 $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$ 이다. 앞의 정리에 의하여 $c_p \neq 0$ 인 정수 p 가 존재하는데, 그러한 정수 중 가장 작은 것을 택하자.

$$g(z) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}$$

라고 하면 결론을 얻는다. ■

따름정리 f 가 영역에서 해석적이고 항등적 영이 아니면 f 의 근들은 고립되어 있다.

따름정리 영역에서 해석적인 함수는 집적점을 갖는 집합 위의 함수값에 의하여 완전히 결정된다. 이 명제를 **일치정리** 또는 **항등정리**라고 부른다.

9. 단순연결영역에서의 Cauchy의 정리

두 함수 $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow G$ 와 $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$ 가 영역 $G \subseteq \mathbb{C}$ 에서의 닫힌경로라고 하자. 만약 연속함수 $\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow G$ 가 존재하여 각 s 에 대하여 $\Gamma(\cdot, s)$ 가 닫힌경로이고

$$\Gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \quad \Gamma(\cdot, 1) = \gamma_1$$

이면 γ_0 과 γ_1 은 G 에서 **동위**(homotopy)라고 말한다. 직관적으로 동위한 한 곡선을 자르거나 꼬이지 않게 옮겨서 다른 곡선이 되도록 변환할 수 있는 것을 의미한다.

동위는 동치관계이다. 따라서 이것을 G 에서 $\gamma_0 \sim \gamma_1$ 이라고 나타내기도 한다.

정리 9.1 γ_0 과 γ_1 이 동위이고 구분적으로 매끄러운 G 에서의 곡선이라고 하자. f 가 G 에서 해석적이면 다음이 성립한다.

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

증명 만약 γ_0 과 γ_1 사이의 동형사상 Γ 가 C^2 급이면 증명은 쉽다. 즉

$$g(s) = \int_0^1 f(\Gamma(t, s)) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) dt$$

라고 하면

$$\begin{aligned} g'(s) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left[f(\Gamma(t, s)) \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s) \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left[f(\Gamma(t, s)) \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, s) \right] dt = 0 \end{aligned}$$

이다 이것은 두 피적분함수가

$$f'(\Gamma(s, t)) \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} + f(\Gamma(s, t)) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t \partial s}$$

와 동일하기 때문에 얻어진 등식이다.

Γ 가 C^2 급이라는 가정 없이 증명하려면 원판에서의 Cauchy의 정리와 다각선 근사 원리를 이용한다.

Γ 가 $[0, 1]^2$ 에서 연속이므로 Γ 는 그 집합 I 에서 균등연속이다. 또한 충분히 작은 $\epsilon > 0$ 이 존재하여 Γ 의 치역의 임의의 점에 대하여 그 점의 ϵ -근방이 G 에 포함되도록 할 수 있다. 따라서 적당한 자연수 n 이 존재하여 Γ 에 의한 각 사각형

$$\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$$

이 $\Gamma(j/n, k/n)$ 의 ϵ -근방에 포함된다. $j=0, 1, \dots, n$ 일 때의 점 $\Gamma(j/n, k/n)$ 을 이어서 만든 다각선을 ρ_k 라고 하자. 원판에서의 Cauchy의 정리에 의하여

$$\int_{\rho_k} f(z)dz = \int_{\rho_{k+1}} f(z)dz$$

이며 또한 다음이 성립한다.

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\rho_0} f(z)dz, \quad \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\rho_n} f(z)dz. \quad \blacksquare$$

영역 G 에서의 닫힌경로가 상수인 경로와 동위이면 **0 동위**(null homotopic)이라고 말한다.

따름정리 γ 가 조각마다 매끄러운 경로이고 G 에서 0 동위이며, f 가 G 에서 해석적이면 다음이 성립한다.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

영역 G 에 포함된 모든 닫힌경로가 0 동위이면 G 를 **단순연결영역**이라고 부른다. 정리 9.1의 결과로 다음 정리를 얻는다.

정리 9.3 G 가 복소평면에서 단순연결영역이면 G 에서 해석적인 임의의 함수 f 와 G 에서 조각마다 매끄러운 임의의 닫힌경로 γ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

이 명제를 **Cauchy의 정리**라고 부른다.

10. Cauchy 적분 공식

복소평면의 점 a 에 막대(pole, 극)가 세워져 있고 a 를 지나지 않는 닫힌곡선이 있다고 하자. 막대를 지나지 않도록 곡선을 끌어당겨서 한 점으로 모을 수 있으면 a 에 대한 곡선의 회전수는 0이다. 만약 그것이 불가능하고, 곡선을 끌어당겨 점 a 로 모이게 했을 때, 곡선이 막대를 휘감는 횟수가 회전수이다. 부호는 감는 방향에 의해 결정된다.

정의 10.1 γ 가 복소평면상에서 조각마다 매끄러운 닫힌곡선이고 $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ 라고 하자. 이때 a 에 대한 γ 의 **지수**(index) 또는 a 에서 γ 의 **회전수**(winding number)를 다음과 같이 정의한다.

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz.$$

참고 점 a 에서 시작되는 반직선을 그린 뒤 닫힌곡선이 반직선을 완전히 통과하여 지나가는 횟수를 세면 회전수와 같다.

보조정리 회전수 $n(\gamma; a)$ 는 임의의 $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ 에 대하여 정수이다. 또한 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 의 연결성분 위에서 $n(\gamma; a)$ 는 a 에 관한 상수함수이다.

증명 γ 가 $[0, 1]$ 에서 매개변수화 되었다고 하고 $g(t)$ 를

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a} ds$$

로 정의하면

$$\frac{d}{dt} \exp[-g(t)][\gamma(t)-a] = 0$$

이므로 초기조건 $t=1$ 을 이용하면

$$\exp[-g(t)][\gamma(t)-a] = \gamma(0)-a$$

를 얻는다. 즉 $\exp[-2\pi i n(\gamma; a)] = 1$ 이므로 $n(\gamma; a)$ 는 우리가 원하는 적분값이다.

명백히 $n(\gamma; a)$ 는 연속함수이고 정숫값을 가지며 연결성분 위에서 상수이다. 또한 $a \rightarrow \infty$ 일 때 $(\gamma; a) \rightarrow 0$ 이므로, 유계가 아닌 연결성분 위에서는 0의 값을 가진다. $\blacksquare$

보조정리 γ_0 과 γ_1 이 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 에서 동위인 두 경로이고 $a \in \mathbb{C}$ 이면 $n(\gamma_0; a) = n(\gamma_1; a)$ 이다.

증명 동위인 두 경로 위에서의 해석적 함수의 선적분의 값은 서로 같다. $\blacksquare$

정리 10.2 γ 가 영역 G 위에서 조각마다 매끄러운 경로이고 0 동위이며 f 가 G 에서 해석적인 함수라고 하자. 그러면 $a \in G \setminus \gamma$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$n(\gamma; a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

이 명제를 **Cauchy의 적분 공식**이라고 부른다.

증명 고정된 $a \in G \setminus \gamma$ 에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{if } z \in G \setminus \{a\} \\ f'(a) & \text{if } z = a \end{cases}$$

그러면 g 는 G 위에서 연속이다. Cauchy의 정리를 g 에 적용하면 원하는 결론을 얻는다. $\blacksquare$

11. Cauchy 적분 공식의 응용

이 장에서는 Cauchy 적분 공식에 관련된 몇 가지 정리를 살펴본다.

정리 11.1 γ 가 영역 G 에서 0 동위인 곡선이고 f 가 G 에서 해석적인 함수이며 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 이 G 에서 f 의 영점이라고 하자. [중복도가 2 이상인 영점은 중복도 만큼 나열했다고 하자.] 그러면 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^m n(\gamma; a_k).$$

증명 G 에서 영이 아니고 해석적인 함수 g 가 존재하여

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)g(z)$$

를 만족시킨다. 이때

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \cdots + \frac{1}{z-a_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

이므로 정리의 결론을 얻는다. ■

방정식 $f(z) = \alpha$ 의 해를 a_i 라고 하면

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz = \sum_{k=1}^m n(\gamma; a_k)$$

가 성립한다. 이 적분은 또한 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{w - \alpha} dw.$$

정리 11.2 f 가 a 에서 해석적이고 $f(a) = \alpha$ 이며 중복도가 유한값 $m \geq 1$ 이라고 하자. 그러면 양수 ϵ 과 δ 가 존재하여 임의의 $\zeta \in B'(\alpha; \delta)$ 에 대하여 방정식 $f(z) = \zeta$ 는 $B(a, \epsilon)$ 에서 정확히 m 개의 중복도 0인 근을 가진다.

증명 근의 개수가 m 이라는 것은 ζ 가 $\mathbb{C} \setminus f \circ \gamma$ 에서 α 와 같은 연결성분에 놓여 있다는 것과 그 값이 정수라는 것에 기인한다. 양수 ϵ 를 충분히 작게 하여 f' 의 근을 피하면 $f(z) = \zeta$ 의 근은 모두 중복도가 0인 근, 즉 단근이 된다. ■

정리 11.3 상수가 아닌 해석적 함수는 열린사상, 즉 열린집합을 열린집합에 대응시킨다. 이 명제를 **열린사상 정리**라고 부른다.

증명 정리 11.1과 11.2로부터 바로 나온다. ■

이제 복소함수가 해석적이기 위한 몇 가지 충분조건을 살펴보자.

정리 11.4 G 가 영역이고 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ 가 연속이며 G 에서의 임의의 삼각형 경로 T 에 대하여 $\int_T f dz = 0$ 이면 f 는 해석적이다. 이 정리를 **Morera의 정리**라고 부른다.

증명 f 가 원판들 위에서 해석적임을 보이면 충분하므로 G 를 원판이라고 하자. 원판의 중심을 a 라고 하고

$$F(z) = \int_{[a, z]} f(w) dw$$

라고 하자.

가정에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0, z]} f(w) dw \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt \end{aligned}$$

이다. 연속성에 의하여 $F'(z_0) = f(z_0)$ 이 성립하므로 f 는 원시 함수를 가지며, 따라서 f 는 해석적이다. ■

정리 11.5 G 가 영역이고 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ 가 연속함수라고 하자. 이때 f 가 G 에서 원시함수를 가질 필요충분조건은 G 에서 조각마다 매끄러운 임의의 폐곡선 γ 에 대하여

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

이 성립하는 것이다.

증명 필요조건임은 확실하므로 충분조건이 됨을 증명하자. $a \in G$ 를 고정시키고

$$F(z) = \int_{\gamma(a, z)} f(w) dw$$

라고 하자. 여기서 $\gamma(a, z)$ 는 a 에서 출발하여 z 를 잇는 조각마다 매끄러운 곡선이다. 그러면 Morera의 정리의 증명에서와 같은 논법에 의하여 $F' = f$ 를 얻는다. ■

만약 G 가 단순연결영역이면 정리 11.5에 의하여 G 에서 해석적인 함수는 항상 원시함수를 가진다. 만약 $0 \notin G$ 이면 z^{-1} 은 G 에서 원시함수를 가진다. 그 원시함수에 적절한 상수를 더함으로써 적당한 점 z_0 에서 z_0 의 로그가 된다고 할 수 있다. 그리고 나서 미분을 이용하면 $\exp(F(z))/z = 1$ 이 됨을 유도할 수 있다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

정리 11.6 G 가 단순연결인 정의역이고 $0 \in G$ 이면 G 에서 로그의 분지가 정의될 수 있다. [흥미로운 예로서 나선 $r = \theta$ 의 여집합을 생각할 수 있다.]

이제 영역에서 미분 가능한 함수가 해석적임을 증명할 수 있게 되었다. [도함수가 연속이라는 가정이 필요하지 않다.]

정리 11.7 G 가 영역이고 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ 가 G 에서 미분 가능하면 f 는 G 에서 해석적이다. 이 명제를 **Goursat의 정리**라고 부른다.

증명 임의의 삼각형 경로에서 f 의 적분이 0임을 보일 것이다. Δ_0 이 경계 T_0 을 갖는 닫힌 삼각형 집합이라고 하자. 삼각형의 세 변의 중점을 연결하는 방법으로 계속 4등분하여 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ 을 얻을 수 있다. Δ_i 의 경계를 T_i 라고 하자. Δ_i 를 4개로 나눈 조각 중 하나인 Δ_{i+1} 를 택할 때

$$\left| \int_{T_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{T_n} f(z) dz \right|$$

를 만족시키도록 할 수 있다. $d = \text{diam } T_0$, $p = \text{perim } T_0$ 이라고 하자. 그러면 $\text{diam } T_n = 2^{-n}d$, $\text{perim } T_n = 2^{-n}p$ 이다. 긴밀성에 의하여 $\cap \Delta_n$ 은 공집합이 아니며 원소를 하나 가진 집합이다. 그 원소를 z_0 이라고 하자.

z_0 에서 f 가 미분 가능하므로, 양수 ϵ 에 대하여 z_0 을 중심으로 하는 원판이 존재하여 원판 내의 모든 점 z 에 대하여

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|$$

이 성립한다. 따라서 적당한 n 이 존재하여 임의의 $z \in \Delta_n$ 에 대하여 동일한 부등식이 성립한다.

$$\int_{T_n} f(z) dz = \int_{T_n} z dz = 0$$

이므로

$$\left| \int_{T_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{T_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right|$$

이다. 따라서

$$\left| \int_{T_0} f(z) dz \right| \leq \epsilon dp$$

이고, 여기서 ϵ 이 임의의 양수이므로

$$\int_{T_0} f(z) dz = 0$$

이다. ■

12. 특이점

이 장에서는 복소함수가 영역의 일부에서 해석적이지 않은 경우를 살펴본다.

정의 12.1 $a \in \mathbb{C}$ 라고 하자. $R > 0$ 이 존재하여 f 가 $B'(a, R)$ 에서는 해석적이지만 $B(a, R)$ 에서는 해석적이지 않으면, a 를 f 의 **고립특이점**이라고 부른다. 만약 a 에서 f 의 함수값을 바꾸어 f 가 $B(a, R)$ 에서 해석적이 되도록 할 수 있으면 a 를 f 의 **제거 가능한 특이점**이라고 부른다.

정리 12.2 a 가 f 의 고립특이점이라고 하자. a 가 제거 가능한 필요충분조건은 $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$ 인 것이다.

증명 필요조건임은 자명하므로 충분조건임을 증명하자.

$$g(z) = \begin{cases} (z - a)f(z) & \text{if } z \neq a \\ 0 & \text{if } z = a \end{cases}$$

라고 하자. Morera의 정리를 a 가 삼각형의 안에 있는 경우, 경계에 있는 경우, 내부에 있는 경우로 나누어 적용하면 g 가 해석적임을 알 수 있다. 따라서 해석적 함수 h 가 존재하여 $g(z) = (z - a)h(z)$ 이고 h 는 우리가 원하는 f 의 확대함수가 된다. ■

따름정리 a 가 f 의 특이점이라고 하자. 만약 $z \rightarrow a$ 일 때 $f(z)$ 가 수렴하거나, $f(z)$ 가 a 의 구멍뚫린 근방에서 유계이거나, 적당한 양수 ϵ 과 C 에 대하여 $|f(z)| \leq C|z - a|^{-(1-\epsilon)}$ 을 만족시키면 a 는 제거 가능하다.

점 a 에서 $|f|$ 의 극한에 따라 a 가 f 의 어떠한 특이점인지 분류할 수 있다. 그 값이 유한 실숫값으로서 존재하면 a 는 f 의 제거 가능한 특이점이다. 극한이 $+\infty$ 에 발산하면 f 는 a 에서 극(pole)을 가진다. 극한이 무한대에 발산하지 않고 수렴하지도 않으면 a 는

f 의 **진성특이점**(essential singularity)이다.

f 가 a 에서 극을 가지면 a 는 $1/f$ 의 제거 가능한 특이점이며 a 에서 $1/f$ 의 함수값을 0으로 정의하여 제거할 수 있다. 이 사실을 이용하면, f 가 a 에서 극을 가질 필요충분조건은 적당한 자연수 m 과 a 의 근방에서 해석적인 함수 g 가 존재하여 $f(z) = (z - a)^{-m}g(z)$ 인 것임을 알 수 있다. 따라서 a 의 구멍뚫린 근방에서 f 를

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

으로 나타낼 수 있다.

정리 12.3 f 가 a 에서 진성특이점을 가지면 임의의 양수 r 에 대하여 $f(B'(a, r))$ 는 $\mathbb{C}$ 에서 조밀하다. 이 명제를 **Casorati-Weierstrass 정리**라고 부른다.

증명 일반성을 잃지 않고 $a = 0$ 이라고 하자. 결론에 반하여 0의 구멍뚫린 원판이 존재하여 그 위에서 $f(z)$ 의 값이 적당한 값 $c \in \mathbb{C}$ 로부터 항상 고정된 양수 ϵ 이상 떨어져 있다고 가정하자. 함수 $g(z) = [f(z) - c]/z$ 는 $z \rightarrow 0$ 일 때 ∞ 에 발산하므로 0에서 극을 가진다. 따라서 충분히 큰 m 에 대하여 $z \rightarrow 0$ 일 때 $z^m[f(z) - c] \rightarrow 0$ 이다. 즉 $z^m f(z) \rightarrow 0$ 이 되는데 이것은 모순이다. ■

13. Laurent 급수

이 장에서는 고리 영역에서 해석적인 함수를 급수로 나타내는 방법을 살펴본다.

정의 13.1 적당한 R 가 존재하여 f 가 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ 에서 해석적이라고 하자. 그러면 f 는 ∞ 에서 **고립특이점**을 가진다고 말한다. 만약 0이 $f(1/z)$ 의 제거 가능한 특이점이면 ∞ 를 f 의 **제거 가능한 특이점**이라고 부른다.

정의에 의하면 다음 세 명제가 동치임을 알 수 있다.

- f 는 ∞ 에서 제거 가능한 특이점을 가진다.
- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$
- f 가 무한대의 근방에서 유계이다.

f 가 ∞ 에서 제거 가능한 특이점을 가지면 f 는 $1/z$ 에 대한 거듭제곱급수로 표현 가능하며 그 급수는 $|z| > R$ 인 영역에서 수렴하고 $|z| \geq \rho > R$ 인 영역에서 균등절대수렴한다. 두 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - a)^{-n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

이 모두 수렴할 때

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

이 수렴한다고 말하고, 처음 두 급수의 합을 위 급수의 값으로 정의한다.

보조정리 γ 가 조각마다 매끄러운 곡선이고 g 가 γ 위에서 연속인 복소함수라고 하자.

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{z-w} dw, \quad z \notin \gamma$$

라고 정의하면 f 는 $\mathbb{C} \setminus \gamma$ 위에서 해석적이다.

증명 $z \notin \gamma$ 를 고정시키자. 그러면 $\zeta \rightarrow z$ 일 때 $w \in \gamma$ 에 대하여

$$\frac{\frac{g(w)}{\zeta-w} - \frac{g(w)}{z-w}}{\zeta-z} = \frac{g(w)}{(\zeta-w)(z-w)} \rightarrow -\frac{g(w)}{(z-w)^2}$$

으로서 균등수렴한다. 따라서 f 는 임의의 $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ 에서 미분 가능하다. ■

함수 f 가 고리 $R_1 < |z| < R_2$ 에서 해석적이라고 하자.

그리고 $R_2 > r > |z|$ 일 때

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

라고 정의하자. [Cauchy 정리에 의하여 위 적분값은 r 의 선택에 독립적이다.] 그러면 f_2 는 $|z| < R_2$ 인 영역에서 해석적이므로 다음과 같은 거듭제곱급수로 표현된다.

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

다음으로 $R_2 < r < |z|$ 에 대하여

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

라고 하자. 그러면 f_1 은 $|z| > R_1$ 에서 해석적이며 ∞ 에서 0에 수렴한다. 따라서

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

이며, 이 급수는 절대수렴하고 고리의 긴밀부분집합에서 균등수렴한다. 이러한 급수의 표현은 유일하므로 a_n 은 다음과 같이 구할 수 있다. 즉 $r \in (R_1, R_2)$ 일 때

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int_{|z|=r} \frac{z^n}{z^{m+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz.$$

고리 안의 임의의 두 원은 동위이므로 a_n 의 값은 r 의 선택에 독립적이다. 이상의 내용을 요약하면 다음과 같다.

정리 13.2 $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ 라고 하자. f 가 고리 영역

$$G = \text{ann}(0; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z| < R_2\}$$

에서 해석적이면 f 는 고리 위에서 급수

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

으로 표현된다. 이 급수는 고리의 긴밀부분집합에서 절대수렴하고 균등수렴한다. 또한 계수 a_n 은 f 에 따라 유일하게 결정되며 $R_1 < r < R_2$ 인 r 에 대하여

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int_{|z|=r} \frac{z^n}{z^{m+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz$$

로 계산된다. 이와 같은 계수를 갖는 급수를 **Laurent 급수**라고 부른다.

a 가 f 의 고립특이점이면 f 는 a 의 구멍뚫린 원판에서 다음과 같은 Laurent 급수로 표현된다.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R$$

이때 $n \geq 0$ 인 부분을 **양의 급수** 또는 **해석부**라고 부르며 $n < 0$ 인 부분을 **음의 급수** 또는 **주부**(principal part)라고 부른다.

여기서

$$\text{ord}_a(f) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid z_n \neq 0\}$$

으로 정의한다. 따라서 다음 두 명제는 서로 동치이다.

- a 는 f 의 제거 가능한 특이점이다.
- $\text{ord}_a(f) \geq 0$ 이고 $f(a) = 0$ 이므로 특이점이 제거되거나, $\text{ord}_a(f) > 0$ 이고, 0의 위수가 $\text{ord}_a(f)$ 와 같다.

또한 $\text{ord}_a(f) = +\infty$ 일 필요충분조건은 a 의 근방에서 $f \equiv 0$ 인 것이다. 그리고 $\text{ord}_a(f) = -\infty$ 일 필요충분조건은 a 가 f 의 진성특이점인 것이다. 한편 $-\infty < \text{ord}_a(f) < 0$ 일 필요충분조건은 f 가 a 에서 극을 갖는 것이며, 이때 $-\text{ord}_a(f)$ 가 극의 위수가 된다.

f 의 Laurent 급수에서 a_{-1} 을 a 에서 f 의 **유수**(residue)라고 부르며 $\text{res}(f; a)$ 로 나타낸다. a 가 f 의 고립특이점이면 충분히 작은 양수 r 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{res}(f; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz.$$

G 가 단순연결영역이고 f 는 G 에서 유한 개의 고립특이점 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 을 제외한 영역 위에서 해석적이며 γ 가 a_j 들을 포함하여 감싸는 닫힌단순곡선이면

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \text{res}(f; a_j)$$

이다. 정확히 말하면 다음과 같다.

정리 13.3 G 가 열린집합이고 E 가 G 의 이산부분집합이며 γ 가 G 에서의 조각마다 매끄러운 닫힌곡선이고 0 동위이며 E 를 지나지 않는다고 하자. 그러면 $\{a \in E \mid n(\gamma; a) \neq 0\}$ 은 유한이며, $G \setminus E$ 에서 해석적인 함수 f 에 대하여

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in E} n(\gamma; a) \text{res}(f; a)$$

가 성립한다. 이 명제를 **유수 정리**라고 부른다.

증명 $F: [0, 1]^2 \rightarrow G$ 가 γ 로부터 상수로의 동위사상이라고 하자. F 의 상 K 는 긴밀집합이므로 E 와 유한 개의 점에서 만난다. 만약 $a \in E$ 가 그 교집합에 속하지 않으면 동위사상은 a 의 밖에서 값을 취하므로 $n(\gamma; a) = 0$ 이 된다.

교집합 $K \cap E$ 의 원소를 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 이라고 하고 a_i 에서 f 의 특이부분(singular part)을 g_i 라고 하자. 그러면 $f - \sum g_i$ 는 a_i 에서 제거 가능한 특이점을 모두 제거했을 때 K 위에서 해석적이며

$$\int_{\gamma} [f(z) - \sum g_i(z)] dz = 0$$

이다. 따라서 정리의 결론을 얻는다. ■

14. 유수 적분

유수의 정의와 Laurent 급수의 정리만을 이용하여 유수를 계산하는 것은 복잡하다. 그러나 특이점이 극인 경우에는 유수를 쉽게 계산하는 방법이 있다. f 가 a 에서 단순극을 가지면 a 에서 해석적인 함수 g 가 존재하여 $f(z) = g(z)/(z-a)$ 이며 따라서 $\text{res}(f; a) = g(a)$ 이다. [Cauchy의 정리는 f 가 단순극을 갖는 특별한 경우의 유수 정리로 생각할 수 있다.] 만약 f 가 a 에서 위수 2인 극을 가지면

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^2} = \frac{g(a)}{(z-a)^2} + \frac{g'(a)}{z-a} + \dots$$

이므로 $\text{res}(f; a) = g'(a)$ 이다. 비슷하게 f 가 a 에서 위수 m 인 극을 가지고 $f(z) = g(z)/(z-a)^m$ 이면 a 를 중심으로 g 의 Taylor 급수를 전개하여

$$\text{res}(f; a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$

가 됨을 알 수 있다. [공식을 기억하는 것보다 원리를 기억하는 것이 더 중요하다.] 이제 유수를 이용하여 적분을 계산하는 예를 살펴보자.

예제 14.1 $0 < a < b$ 일 때 다음 적분을 계산하여라.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$

풀이 원점을 중심으로 하는 상반원을 적분영역으로 하고 반지름을 양의 무한대로 하는 극한을 취하면 적분값이

$$\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

임을 알 수 있다. 차수가 -2 이하인 임의의 유리함수에 대하여 같은 방법을 사용할 수 있다. ■

예제 14.2 다음 적분을 계산하여라.

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 x dx$$

풀이 단위원 γ 에 대하여

$$\int_{\gamma} \frac{1}{iz} \left(\frac{z+z^{-1}}{2i} \right)^4 dz$$

를 계산하면 $3\pi/4$ 를 얻는다. 이 방법은 $\sin$ 과 $\cos$ 의 유리함수에 대하여 사용할 수 있다. ■

예제 14.3 다음 적분을 계산하여라.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{1/2} + t^{3/2}} dt$$

풀이 양의 실수축을 분지로 한 함수 $z^{-1/2}$ 를 생각하자. 분지 둘레와 원점을 중심으로 한 큰 원 위에서 적분을 하고 작은 원을 이용하여 중심을 피한다. 그러면 π 를 얻는다. $\alpha \in (0, 1)$ 이고 $r(t)$ 가 차수 -2 인 유리함수이며 0에서 단순극을 갖거나 극을 갖지 않는 경우의 적분

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} r(t) dt$$

에 이 방법을 사용할 수 있다. ■

예제 14.4 다음 적분을 계산하여라.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

풀이 먼저 다음 극한을 구하자.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty, \delta \searrow 0} \int_{-X}^{-\delta} + \int_{\delta}^X \frac{e^{iz}}{z} dz$$

극한 내부의 값의 허수부는

$$2 \int_s^X \frac{\sin x}{x} dx$$

와 같다. 극한을 취할 때 반드시 원점에 대하여 대칭인 구간을 잡아야 한다. [e^{iz}/z 는 원점 근방에서 적분 불가능한 특이점을 가지므로 $(\sin x)/x$ 의 허수부가 적분 가능할지라도 $(\sin x)/x$ 는 적분 불가능해지기 때문이다.] 반면에 피적분함수를 반드시 대칭인 점 $-X$ 와 X 로 잘라낼 필요는 없다. [$-X_1$ 과 X_2 를 사용하고 두 점을 각각 0으로 보내는 극한을 사용할 수 있다.]

비교적 단순한 경로를 사용하여 적분하자. $-X$ 에서 출발하여 실수축을 따라 $-\delta$ 까지, 상반원을 지나 δ 까지, 실수축을 따라 X 까지, 그리고 순서대로 $X+iX$, $-X+iX$, $-X$ 를 다각선으로 잇는다. 피적분함수 e^z/z 는 이 경로의 내부에서 극을 갖지 않으므로 이 경로를 따른 선적분은 0이다. 수직인 선분 위에서 이 적분은 $1/X$ 에 의하여 유계이며, 수평인 선분 위에서는 $2e^{-X}$ 에 의하여 유계이다. 한편 e^{iz}/z 는 $1/z$ 와 해석적 함수의 합으로 표현되며, 반원 위에서 $1/z$ 의 적분(시계방향)은 $-\pi i$ 이다. 따라서 위 극한은 πi 에 수렴하므로 다음을 얻는다.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

예제 14.5 $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ 일 때 다음 급수를 계산하여라.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2}$$

풀이 자연수 n 에 대하여 $\pm(n+1/2) \pm \pi i$ 를 네 꼭짓점으로 하는 사각형 경로에서 적분

$$\int_{\gamma} \frac{\cot \pi z}{(z-a)^2} dz, \quad a \notin \mathbb{Z}$$

를 계산하자. 피적분함수의 극은 a 와 정수점 위에 있고, 그 유수는 각각

$$\frac{-\pi}{\sin^2 \pi a}, \quad \frac{1}{\pi(n-a)^2}$$

이다. 두 등식

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

을 이용하면 다음을 얻는다.

$$|\cot(x+iy)|^2 = \frac{\cos^2 x + \sinh^2 y}{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

따라서 $|\cot z|$ 는 수직인 선 위에서는 1의 값을 가지며, n 이 충분히 크면 수평인 선에서는 2에 의하여 유계이다. 그러므로 위 적분은 $n \rightarrow \infty$ 일 때 0에 수렴하고, 다음을 얻는다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}$$

15. 편각 원리

이 장에서는 유수정리를 응용한 정리를 살펴보자.

정의 15.1 극 이외의 특이점을 갖지 않는 함수를 **유리형 함수** (meromorphic function)라고 부른다.

참고 유리형 함수의 극의 개수는 무한히 많을 수도 있으나 반드시 이산적이다. 만약 $\mathbb{C}_\infty$ 에서 생각하면 유리형 함수는 연속함수이다.

함수 f 가 a 에서 유리형이라고 하자. 즉 a 의 한 근방에서 f 가 유리형 함수가 된다고 하자. 그러면 $\text{res}(f/f'; a) = \text{ord}_a(f)$ 이다. 실제로 $m = \text{ord}_a(f)$, $g(a) \neq 0$ 일 때 $f(z) = (z-a)^m g(z)$ 이고 $f'/f = m/(z-a) + g'/g$ 이다. 따라서 유수 정리에 의하여 다음을 얻는다.

정리 15.2 G 가 열린집합이고 f 가 G 에서 유리형 함수이며, γ 가 0 동위이고 조각마다 매끄러운 닫힌곡선이며 f 의 영점집합 Z 와 극점집합 P 를 지나지 않는다고 하자. 그러면

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_a n(\gamma; a) \text{ord}_a(f)$$

이다. 여기서 합은 $Z \cup P$ 위에서 취해졌고 유한 개의 항만을 포함한다. 이 명제를 **편각 원리**(argument principle)라고 부른다.

참고 위 등식의 좌변은 $n(f \circ \gamma; 0)$ 으로서 곡선을 횡단할 때 편각이 얼마나 변하는지를 나타낸다. 위 명제의 이름이 편각 원리인 이유이기도 하다.

우리는 이미 앞에서 위와 비슷한 정리로서 f 가 해석적인 경우 적분이 f 의 영점의 개수를 나타내는 것을 살펴보았다. 유리형 함수 f 의 경우 극점의 개수를 영점의 개수에 상쇄시키는 것으로 생각할 수 있다.

정리 15.3 G 가 열린집합이고 f 와 g 가 G 에서의 유리형 함수이며, f 의 영점 집합을 Z_f , 극점의 집합을 P_f , g 의 영점 집합을 Z_g , 극점의 집합을 P_g 라고 하자. γ 가 0 동위이고 조각마다 매끄러운 G 의 닫힌곡선이며 $Z_f \cup P_f \cup Z_g \cup P_g$ 를 지나지 않는다고 하자. 만약 임의의 $z \in \gamma$ 에 대하여

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

이면 다음이 성립한다.

$$\sum_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma; a) \text{ord}_a(f) = \sum_{a \in Z_g \cup P_g} n(\gamma; a) \text{ord}_a(g)$$

이 명제를 **Rouché의 정리**라고 부른다.

증명 정리의 가정에 의하여 γ 위에서 $f(z)/g(z)$ 는 영이 아닌 실숫값을 가진다. $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ 에서의 로그의 분지를 l 이라고 하자. 그러면 $l(f/g)$ 는 $(f/g)'/(f/g) = f'/f - g'/g$ 의 원시함수가 되는데, 이 함수는 γ 의 근방에서 해석적이다. 따라서

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

이므로 편각원리에 의하여 정리의 결론을 얻는다. ■

Rouché의 정리는 본래 다음과 같은 형태로 진술되었다.

따름정리 f 와 ϕ 가 단순연결영역 G 에서 해석적이고 γ 가 조각마다 매끄러운 G 의 닫힌단순곡선이라고 하자. 만약 γ 위에서 $|\phi| < |f|$ 이면 γ 로 둘러싸인 영역에서 $f+\phi$ 는 f 와 동일한 영점을 가진다.

증명 $|(f+\phi) + (-f)| = |\phi| < |f| \leq |f+\phi| + |-f|$. ■

보기 15.4 $\lambda > 1$ 일 때 방정식 $ze^{\lambda-z} = 1$ 은 단위원판 위에서 단 하나의 해를 가진다. $f(z) = z^{\lambda-z}$, $\phi(z) = -1$ 로 두고 따름정리의 결과를 이용하면 된다.

16. 해석적 함수의 성질

복소평면의 한 영역에서 연속인 함수들을 모은 집합에 긴밀부분 집합 위에서의 균등수렴 위상이 주어진 공간을 생각해보자. 이 장에서 살펴볼 Weierstrass 정리는 해석적 함수들의 모임이 그러한 공간의 닫힌부분집합이며 미분 연산이 연속임을 보여준다. 또한 Montel의 정리는 해석적 함수들이 모인 공간의 예비긴밀 부분집합이 어떠한 특징을 갖는지 설명한다.

정리 16.1 G 가 열린집합이고 $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ 가 해석적 복소함수이며 G 의 긴밀부분집합 위에서 f 에 균등수렴한다고 하자. 그러면 f 는 해석적이며, G 의 긴밀부분집합 위에서 f_n' 은 f' 에 균등수렴한다. 이 명제를 **Weierstrass의 정리**라고 부른다.

증명 T 가 삼각형 경로이면

$$\int_T f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n(z) dz = 0$$

이므로 Morera의 정리에 의하여 f 는 해석적이다. γ 가 z 를 중심으로 하고 G 에 포함되는 원판의 둘레이면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dz = f'(z) \end{aligned}$$

를 얻는다. ■

정리 16.2 f_n 과 f 가 영역 G 에서 해석적이고 G 의 긴밀부분집합에서 f_n 이 f 에 균등수렴한다고 하자. 만약 각 f_n 이 어떤 점에서 영의 값을 갖지 않으면 f 는 어떤 점에서도 영의 값을 갖지 않거나 또는 모든 점에서 영의 값을 가진다. 이 명제를 **Hurwitz의 정리**라고 부른다.

증명 f 가 상수함수가 아니고 $f(a) = 0$ 이라고 하자. 그러면 양수 r 를 택하되 $\overline{B}(a, r) \subseteq G$ 이고 f 가 $\overline{B}(a, r)$ 에서 a 만을 영점으로 갖도록 할 수 있다. γ 가 이 원판의 경계라고 하자. 그러면 편각 원리에 의하여

$$\int_{\gamma} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} dz = 0 \quad \text{그러나} \quad \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \text{ord}_a(f) \neq 0$$

이 된다. Weierstrass 정리에 의하여 γ 위에서 f_n'/f_n 은 f'/f 에 균등수렴하므로 이것은 모순이다. ■

따름정리 f_n 과 f 가 영역 G 위에서 해석적이고 G 의 긴밀부분 집합에서 f_n 이 f 에 균등수렴한다고 하자. 각 f_n 이 일대일함수이면 f 는 일대일함수거나 상수함수이다.

증명 f 가 상수함수가 아니지만 $f(a)=f(b)$ 인 서로 다른 두 점 a, b 가 있다고 하자. 그러면

$$B(a, r) \cup B(b, r) \subseteq G, \quad B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$$

이 되는 양수 r 가 존재한다. $B(a, r)$ 의 긴밀부분집합 위에서 $f_n(z)-f(a)$ 는 $f(z)-f(a)$ 에 균등수렴하며 $f(z)-f(a)$ 는 그 위에서 영점을 갖지만 상수함수는 아니다. 따라서 충분히 큰 모든 n 에 대하여 $z \in B(a, r)$ 일 때마다 $f_n(z)=f(a)$ 이며, 마찬가지로 적당한 $z \in B(b, r)$ 에 대해서도 $f_n(z)=f(b)$ 이다. 이것은 f_n 이 일대일함수라는 데에 모순이다. ■

정리 16.3 G 가 열린집합이고 F 가 G 에서 해석적인 함수들의 모임이며 $\{f_n\}$ 이 G 의 임의의 긴밀부분집합 위에서 균등유계인 함수열이라고 하자. 그러면 G 의 임의의 긴밀부분집합에서 균등수렴하는 $\{f_n\}$ 의 부분수열이 존재한다. 이 명제를 **Montel의 정리**라고 부른다.

증명 $a \in G$ 이고 $d(a) = 2^{-1} \text{dist}(a, \partial G)$ 라고 하자. 먼저 열린구 $B(a, 2^{-1}d(a))$ 에서 균등수렴하는 부분수열을 찾을 수 있음을 보이자. $z \in \overline{B}(a, d(a))$ 에 대하여

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_m^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

이라고 정의하자. $\overline{B}(a, d(a))$ 에서 f_m 의 균등상계를 M 이라고 하자. Cauchy 부등식에 의하여

$$|f_m^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{d(a)^n}$$

이 성립한다. 특히 각 n 에 대하여 $\sup_m |f_m^{(n)}(a)| < \infty$ 이다.

따라서 $j \rightarrow \infty$ 일 때 수렴하는 부분수열 $f_{m^0(j)}$ 가 존재한다. 그리고 다시 수렴하는 부분수열 $f_{m^2(j)}'(a)$ 가 존재한다. 대각법을 이용하여 임의의 n 에 대하여 수렴하는 부분수열

$$g_j = f_{m^j(j)} g_j^{(n)}(a)$$

를 찾을 수 있다. 이제 g_j 가 $B(a, 2^{-1}d(a))$ 에서 균등수렴함을 증명하자. 자연수 N 과 $z \in B(a, 2^{-1}d(a))$ 에 대하여, j, k 가 N 보다 클 때

$$\begin{aligned} & |g_j(z) - g_k(z)| \\ & \leq \sum_{n=0}^N |g_j^{(n)}(a) - g_k^{(n)}(a)| \frac{|z-a|^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2M}{d(a)^n} |z-a|^n \\ & \leq \sum_{n=1}^N |g_j^{(n)}(a) - g_k^{(n)}(a)| \frac{|z-a|^n}{n!} + \frac{2M}{2^N} \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 $\epsilon > 0$ 에 대하여 N 을 택하되 $0 \leq n \leq N$ 에 대하여 j 와 k 가 N 보다 클 때 다음 부등식을 만족하도록 한다.

$$|g_j^{(n)}(a) - g_k^{(n)}(a)| \leq \frac{n! \epsilon}{2(N+1)[2^{-1}d(a)]^n}$$

따라서 g_j 는 $B(a, 2^{-1}d(a))$ 에서 균등수렴한다.

이제 G 에서의 가산개의 점 $\{a_i\}$ 를 택하되

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(a_i, 2^{-1}d(a_i))$$

가 되도록 한다. [예를 들면 G 의 점 중에서 실수부와 허수부가 모두 유리수인 점들을 택하면 된다.] 주어진 함수열 f_m 은 긴밀 집합 위에서 균등유계이므로 $B(a_1, 2^{-1}d(a_1))$ 에서 균등수렴하는 부분수열 $f_{m^1(j)}$ 가 존재한다. 마찬가지로 이 수열의 부분수열 중에서 $B(a_2, 2^{-1}d(a_2))$ 에서 균등수렴하는 부분수열을 택할 수 있다. 그리고 대각법으로 $B(a_i, 2^{-1}d(a_i))$ 에서 균등수렴하는 부분수열 h_j 를 택할 수 있다.

G 의 임의의 긴밀부분집합은 $B(a_i, 2^{-1}d(a_i))$ 들의 유한합집합으로 표현되므로 h_j 는 G 의 긴밀부분집합에서 균등수렴한다. ■

해석적 함수 f 가 중심이 a 이고 반지름이 ϵ 인 원판을 중심이 $f(a)$ 이고 반지름이 δ 인 원판에 대응시킨다고 하자. 이것을 이용하여 $f'(a)$ 의 값과 $|f(b)-f(a)|/|b-a|$ 의 범위를 추정할 수 있다. 일반성을 잃지 않고 $a=f(a)=0$, $\epsilon=\delta=1$ 이라고 하면 다음 정리를 얻는다.

정리 16.4 f 가 열린단위원판을 열린단위원판에 대응시키고 원점을 원점에 대응시킨다고 하자. 그러면 원판 위의 임의의 점 z 에서 $|f(z)| \leq |z|$ 가 성립한다. 만약 영이 아닌 점에서 등호가 성립하지 않는다면 크기가 1인 복소수 c 가 존재하여 $f(z)=cz$ 를 만족시킨다. 또는 $|f'(0)| \leq 1$ 이고 적당한 점에서 등호가 성립하여도 크기가 1인 복소수 c 가 존재하여 $f(z)=cz$ 를 만족시킨다. 이 명제를 **Schwarz의 보조정리**라고 부른다.

증명 함수 $g(z)=f(z)/z$ 는 원점에서 제거 가능한 특이점을 가지며 $g(0)=f'(0)$ 으로 정의하면 원판에서 해석적인 함수가 된다. 반지름이 $r < 1$ 미만인 원판 위에서 $|g(z)| \leq 1/r$ 를 만족시키므로 최대절댓값 정리에 의하여 반지름이 r 인 원판 위에서도 동일한 부등식을 만족시킨다. $r \nearrow 1$ 인 극한을 취하면 정리의 결과를 얻는다. ■

열린단위원판을 그 위에 대응시키는 가장 일반적인 일차분수 변환은

$$z \mapsto c \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

이다. 여기서 a 는 원판 안의 점이고 $|a|=1$ 이다. Schwarz의 보조정리를 이용하여 이 사상이 열린단위원판을 그 위에 대응시키는 가장 일반적인 일대일 해석적 함수임을 보일 수 있다.

먼저 $f(0)=0$ 인 경우를 살펴보자. 그러면 Schwarz의 보조정리에 의하여 $|f'(0)| \leq 1$ 이고 등호는 $|a|=1$ 인 적당한 c 에 대하여 $f(z)=cz$ 일 때 성립한다. Schwarz의 보조정리를 f^{-1} 에 적용하면 $|1/f'(0)|=|(f^{-1})'(0)| \leq 1$ 을 얻는다. 따라서 등호가 성립한다.

일반적인 경우를 위해 $f(a)=0$ 이라고 하자. 그러면 $f \circ \phi_{-a}$ 에 같은 논법을 적용하여 $f(\phi_{-a}(z))=cz$ 또는 $f(z)=c\phi_a(z)$ 를 얻는다.

17. Riemann 사상 정리

단순연결성에 관련된 성질을 살펴보자.

단순연결영역에서 해석적인 함수는 원시함수를 가진다. 함수 f 가 단순연결영역 위에서 0이 되지 않는 해석적 함수이면 그 영역 위에서 $f = \exp(F)$ 가 되는 해석적 함수 F 가 존재한다. 즉 $f \exp(-F)$ 는 상수함수이므로 덧셈에 대한 역원으로서 f'/f 의 원시함수 g 를 더하면 $f = \exp(F)$ 를 얻는다.

또 다른 성질로는 **제공근 성질**이 있다. 즉 f 가 주어진 영역의 어느 점에서든 영이 되지 않는 해석적 함수이면 $[g(z)]^2 = f(z)$ 가 되는 해석적 함수 g 가 존재한다. 사실 $g = \exp(F/2)$ 를 택하면 된다. 따라서 두 영역 G_1 과 G_2 가 미분동형일 때 G_1 이 제공근 성질을 가질 필요충분조건은 G_2 가 제공근 성질을 갖는 것이다.

보조정리 $D = B(0, 1)$ 이고 $G \subsetneq D$ 가 위점을 포함하며 제공근 성질을 갖는 영역이라고 하자. 그러면 G 로부터 D 로의 해석적인 일대일함수 r 가 존재하여 $r(0) = 0$, $\forall z \in G \setminus \{0\} : |r(z)| > |z|$ 를 만족시킨다. 이 명제를 **Koebe의 보조정리**라고 부른다.

증명 $a \in D \setminus G$ 이고 b 가 $-a$ 의 제공근 중 하나라고 하자.

$$\phi_a(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad q(z) = \phi_{-a}([\phi_{-b}(z)]^2)$$

이라고 정의하자. 명백히 $q(0) = 0$ 이고 q 는 단순한 상수의 곱이 아니다. [사실 q 는 D 에서 일대일함수가 아니다.] Schwarz의 보조정리에 의하여 $0 \neq z \in D$ 일 때 $|q(z)| < |z|$ 가 성립한다.

다음으로 ϕ_a 는 G 로부터 D 로의 일대일인 해석적 함수이며 함수 값이 영이 되지 않으므로 제공근 $g(z)$ 를 갖는데, $g(0) = b$ 라는 조건에 의하여 그러한 g 는 유일하게 결정된다. $r = \phi_b \circ g$ 라고 정의하면 $r(0) = 0$, $q(r(z)) \equiv z$ 이다. 따라서 $0 \neq z \in G$ 이면 $r(z) \neq 0$ 이고 $|z| = |q(r(z))| < |r(z)|$ 이다. ■

두 영역 사이에 해석적인 일대일대응이 존재하면 두 영역을 **해석적 동형** 또는 **등각동치**(conformally equivalent)라고 한다.

정리 17.1 $G \subsetneq \mathbb{C}$ 가 단순연결집합이면 G 는 단위원판과 등각 동치이다. 이 명제를 **Riemann 사상 정리**라고 부른다.

증명 G 가 제공근 성질을 가진다는 것을 이용하자.

증명은 다음과 같은 과정으로 이루어진다 — G 로부터 G_0 위에서 해석적이면서 Koebe의 보조정리의 조건을 만족시키는 일대일함수 h_0 을 구성한다. 다음으로 G_0 으로부터 원판에 포함되는 영역 G_1 으로의 해석적인 일대일함수를 구성한다. 만약 G_1 이 원판 전체라면 여기서 증명이 끝난다. 그렇지 않으면 G_1 은 Koebe의 보조정리의 조건을 만족시키므로 보조정리를 이용하여 f 의 극값 성질에 관련된 모순을 이끌어낼 수 있다.

$a \in \mathbb{C} \setminus G$ 이고 g 가 $z - a$ 의 해석적 제공근이라고 하자. g 는 일대일함수이며, $w \in g(G)$ 일 때 $-w \notin g(G)$ 이다. 열린사상 정리에 의하여 $w_0 \in g(G)$ 와 $r > 0$ 가 존재하여 $B(w_0, r) \subseteq g(G)$ 를 만족시킨다. 따라서 $B(-w_0, r) \cap g(G) = \emptyset$ 이다. $h(z) = [g(z) + w_0]^{-1}$ 이라고 하면 $h : G \rightarrow \overline{B}(0, 1/r)$ 는 해석적인 일대일함

수이다. $z_0 \in G$ 에 대하여 $h_0(z) = r[h(z) - h(z_0)]/3$ 이라고 하자. 이 함수는 G 로부터 0을 포함하는 영역 $G_0 \subsetneq D$ 로의 해석적 동형사상이다.

$f(0) = 0$ 을 만족시키는 해석적 일대일함수 $f : G_0 \rightarrow D$ 들의 모임을 F 라고 하자. $0 \neq w_0 \in G_0$ 이고 $\alpha = \sup_{f \in F} |f(w_0)|$ 이라고 하자. 그러면 $\alpha \in (0, 1]$ 이다. $f_n \in F$, $|f_n(w_0)| \rightarrow \alpha$ 라고 가정하자. f_n 은 균등유계이므로 Montel의 정리에 의하여 G_0 의 긴밀 부분집합에서 해석적 함수 f 에 균등수렴하는 부분수열 f_{n_k} 가 존재한다. 명백히 $f(0) = 0$ 이고 $|f(w_0)| = \alpha > 0$ 이므로 f 는 상수 함수가 아니고, F_n 이 일대일함수이므로 f 도 일대일함수이다. 또한 G_0 위에서 $|f| \leq 1$ 이고, 최대절댓값 정리에 의하여 $|f| < 1$ 이다. 따라서 $f \in F$ 이므로 F 는 상한을 최댓값으로서 가진다.

f 가 G_0 으로부터 D 위에서의 동형사상임을 보이자. [그러면 함수 $f \circ h_0$ 은 우리가 원하는 G 로부터 D 로의 해석적 동형사상이 된다.] f 가 해석적이고 일대일함수라는 것은 이미 밝혔으므로 f 가 D 위에서의 함수임을 보이면 된다. $G_1 = f(G_0) \subsetneq D$ 라고 가정하면 (G_1 은 G_0 으로부터, 그리고 G_0 은 G 로부터 제공근 성질을 이어받았으므로) Koebe의 보조정리에 의하여 $r(0) = 0$ 이고 $z \neq 0$ 일 때 $|r(z)| > |z|$ 를 만족시키는 해석적 함수 $r : G_1 \rightarrow D$ 가 존재한다. 따라서 $r \circ f \in F$ 이지만 $|r(f(w_0))| > |f(w_0)|$ 이므로 모순이다. ■

참고 제공근 성질은 단순연결성과 동치이다. 이미 앞서 단순연결영역이 제공근 성질을 가진다는 것을 밝혔다. 역으로 G 가 제공근 성질을 가진다고 하면 $G = \mathbb{C}$ 로서 단순연결영역이거나, G 는 원판과 동형이므로 단순연결영역이 된다.

참고 $G \subsetneq \mathbb{C}$ 가 단순연결영역이고 $z_0 \in G$ 가 임의의 점일 때, G 로부터 원판 위에서의 해석적 동형사상을 택하고 일차분수 변환

$$c \mapsto c \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1, \quad |c| = 1$$

을 이용하여 $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ 을 만족시키는, G 로부터 D 위에서의 해석적 동형사상을 만들 수 있다. 만약 f_1 과 f_2 가 그러한 동형사상이면 $g = f_2 \circ f_1^{-1}$ 은 원판으로부터 그 위에서의 해석적 동형사상이며 $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$ 을 만족시키고, 항등 함수가 된다. 따라서 $f_1 = f_2$ 이다.

18. 조화함수

복소평면의 부분영역에서 Laplace 방정식을 만족시키는 C^2 급 실함수를 **조화함수**라고 부른다. 즉 G 가 $\mathbb{C}$ 의 부분영역이고 실수 x, y 에 대하여 $z = x + iy$ 일 때 함수 $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ 가 조화함수라는 것은 방정식

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = 0$$

을 만족시키는 것이다. 이것을 간단하게 $\nabla^2 u = 0$ 또는 $\Delta u = 0$ 으로 나타내기도 한다. 앞에서 해석적 함수의 실수부는 조화적이라는 것을 밝혔으며, 정의역이 단순연결영역인 경우 조화적 실함

수는 조화공액을 가진다는 것을 밝혔다. 특히 임의의 모든 조화 함수가 C^∞ 급인 것을 보았다.

실함수 u 가 G 에서 조화적이고 $a \in G$ 라고 하자. 만약 $r > 0$ 이고 $\overline{B}(a, r) \subseteq G$ 이면 $\overline{B}(a, r) \subseteq D \subseteq G$ 인 원판 D 를 찾을 수 있으며, D 는 단순연결집합이므로 D 위에서의 해석적 함수 f 가 존재하여 $u = \operatorname{Re} f$ 를 만족시킨다. Cauchy의 적분공식에 의하면

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta$$

이고, 이 식의 실수부를 취하면 다음 정리를 얻는다.

정리 18.1 실함수 u 가 G 에서 조화적이고 $\overline{B}(a, r) \subseteq G$ 이면

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta}) d\theta$$

가 성립한다. 이 명제를 조화함수의 **평균값 정리**라고 부른다.

참고 조화함수는 **최댓값 성질**을 가진다. 즉 상수함수가 아닌 조화함수는 영역의 내부에서 최댓값을 갖지 않는다. 사실 평균값 성질을 갖는 모든 연속함수는 최댓값 성질을 가지며, 심지어는 부등식

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta}) d\theta$$

를 만족시키는 연속함수는 최댓값 성질을 가진다. [이 부등식에 의하면 최댓값을 갖는 점들의 모임이 여단인 집합이 되기 때문이다.] 부등호의 방향이 반대인 부등식을 만족시키는 함수는 최솟값 성질을 가진다.

참고 유계인 영역 G 와 함수 $f: \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 G 에서 조화적이고 $\overline{G}$ 에서 연속이며 ∂G 에서 $f=u$ 인 함수 $u: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 찾는 문제를 **Dirichlet 문제**라고 부른다. 만약 Dirichlet 문제의 해가 존재한다면 최댓값 성질과 최솟값 성질에 의해 그 해는 유일하다. u_1 과 u_2 가 그 해라면 $u_1 - u_2$ 는 조화적이고 G 의 경계에서 0인 함숫값을 가진다. 따라서 G 의 내부에서도 0인 함숫값을 갖게 된다.

참고 경계에서 연속인 함수로 확장되는지 알지 못하는 함수에 최댓값 성질을 적용할 때에는 다음과 같은 방법을 사용하면 유용하다. — u 가 유계인 영역에서 최댓값 성질을 갖고 z_0 에서 $u(z)$ 의 상극한이 K 이하라면 G 위에서 $u \leq K$ 이다. [G 에서 u 의 상한을 M 이라고 하고 $u(z_n) \rightarrow M$ 이 되도록 $z_n \in G$ 를 택하자.

$$z_{n_k} \rightarrow z_0 \in \overline{G}$$

인 부분수열을 택하자. 만약 $z_0 \in G$ 이면 u 는 그 점에서 최댓값을 가지므로 $M \leq K$ 가 되어 u 는 상수함수가 된다. 그렇지 않은 경우 $z_0 \in \partial G$ 이므로

$$K \geq \overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} u(z) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} u(z_{n_k}) = M$$

이다.]

$0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ 일 때 **Poisson 핵**을

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

으로 정의한다. 참고로

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

가 성립한다.

보조정리 $0 \leq r < 1$ 일 때 $P_r(\theta)$ 는 매끄럽고 양의 값을 가지며 우함수이고 주기가 2π 이며 평균값이 1이다. 더욱이 $\theta > 0$ 일 때

$$\lim_{r \nearrow 1} P_r(\theta) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$$

이며, 만약 $\delta > 0$ 이면 이 극한의 수렴은 $|\theta - 2\pi n| \geq \delta$, $n \in \mathbb{Z}$ 인 $\theta \in \mathbb{R}$ 에 대하여 균등수렴이다.

증명 적분의 급수표현과 극한에 등식

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos\theta)}$$

를 이용하면 증명된다. ■

이제 D 가 열린단위원판이고 ∂D 그 경계라고 하자. 다음 정리는 D 위에서 Poisson 핵을 이용하여 Dirichlet 문제를 해결하는 방법을 보여준다.

정리 18.2 연속함수 $f: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 함수 u 를 $z \in \partial D$ 일 때에는 $u(z) = f(z)$ 로 정의하고, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ 일 때에는

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-t) f(e^{it}) dt$$

로 정의하자. 그러면 u 는 $\overline{D}$ 에서 연속이고 D 에서 조화적이다.

증명 정의에 의하여

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1+re^{i(\theta-r)}}{1-re^{i(\theta-t)}} dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} dt \right] \end{aligned}$$

이고

$$u(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right], \quad z \in D$$

이다. 피적분함수가 t 와 z 에 관하여 연속이고 z 에 대하여 해석적이므로 위 적분은 z 에 대한 연속함수이다. 따라서 u 는 해석적 함수의 실수부로서 조화함수가 된다.

이제 $z \rightarrow e^{it_0}$ 이고 $z \in D$, $t_0 \in \mathbb{R}$ 일 때 $u(z) \rightarrow f(e^{it_0})$ 이 됨을 보여야 한다.

$$u(re^{i\theta}) - f(e^{it_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} P_r(\theta-t) [f(e^{it}) - f(e^{it_0})] dt$$

이므로 θ 가 t_0 에 충분히 가깝고 $r < 1$ 이 1에 충분히 가까울 때 위 등식의 우변의 적분이 충분히 작아질 수 있음을 보여야 한다.

임의로 주어진 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $|t - t_0| < \delta$ 일 때마다 $|f(e^{it}) - f(e^{it_0})| \leq \epsilon$ 을 만족시키는 δ 를 택하자. 적분 구간 $I_1 \cup I_2$ 를

$$I_1 = \{t \mid |t - t_0| \leq \delta\}, \quad I_2 = \{t \mid \delta \leq |t - t_0| \leq \pi\}$$

로 분할하자. I_1 에서 피적분함수는 $P_r(\theta-r)\epsilon$ 에 의하여 유계이므로 적분은

$$\frac{\epsilon}{2\pi} \int_{I_1} P_r(\theta-t) dt \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta-r) dt \leq \epsilon$$

으로서 유계이다. 이제 $|\theta-t_0| \leq 2^{-1}\delta$ 로서 θ 가 t_0 에 충분히 가깝다고 하자. 그러면 $t \in I_2$ 에 대하여

$$\begin{aligned} |\theta-t| &\geq |t-t_0| - |\theta-t_0| \geq 2^{-1}\delta, \\ |\theta-t| &\leq |t-t_0| + |\theta-t_0| \leq \pi + 2^{-1}\delta \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서 $r \nearrow 1$ 이고 $t \in I_2$ 일 때 $P_r(\theta-t) \rightarrow 0$ 이다. f 가 유계이므로 전체 피적분함수도 0에 균등수렴한다. 따라서 만약 $|\theta-t_0| \leq 2^{-1}\delta$ 일 때 r 를 1에 충분히 가깝게 하여 I_2 에서의 적분이 ϵ 보다 작아지도록 할 수 있다. ■

이제 평균값 성질을 가진 함수가 조화함수가 됨을 밝히자.

정리 18.3 $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ 가 평균값 성질을 갖는 연속함수이면 u 는 조화함수이다.

증명 경계가 G 의 내부에 포함되는 원판에서 u 가 조화적임을 밝히면 충분하다. Poisson 핵의 구성 과정에서, 원판의 경계에서 u 와 동일한 값을 갖는 조화함수 u_0 를 구성할 수 있다. 이때 $u - u_0$ 는 원판에서 평균값 성질을 가지며 원판의 경계에서 0인 함수값을 가지므로 원판에서 $u = u_0$ 이다. ■

따름정리 긴밀집합 위에서 조화함수열이 균등수렴하면 극한함수도 조화함수이다.

Poisson의 핵

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{(1+r)^2 - 2r(1+\cos\theta)} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + 2r(1-\cos\theta)}$$

로부터 다음을 얻는다.

$$\frac{1-r}{1+r} \leq P_r(\theta) \leq \frac{1+r}{1-r}.$$

이제 $B(0, R)$ 에서 u 가 조화적이고 $u \geq 0$ 이며 $re^{i\theta} \in B(0, R)$ 라고 하자. $r < R - \epsilon$ 인 충분히 작은 $\epsilon > 0$ 을 택하고 $U(z) = u((R-\epsilon)z)$ 라고 하자. U 는 $\overline{B}(0, 1)$ 의 근방에서 조화적이므로

$$u(re^{i\theta}) = U\left(\frac{r}{R-\epsilon}e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{\frac{r}{R-\epsilon}}(\theta-t) U(e^{it}) dt$$

이다. $u \geq 0$ 이므로 평균값 정리와 P_r 의 상계를 이용하면

$$u(re^{i\theta}) \leq \frac{1 + \frac{r}{R-\epsilon}}{1 - \frac{r}{R-\epsilon}} u(0)$$

을 얻는다. $\epsilon \searrow 0$ 인 극한을 취하면

$$u(re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(0)$$

을 얻는다. 비슷한 방법으로 하계도 구할 수 있다. 물론 평행이동하여 중심이 a 인 경우도 생각할 수 있다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

정리 18.4 $B(a, R)$ 에서 u 가 조화적이고 음이 아닌 값을 가지면 $0 \leq r < R$ 에 대하여

$$\frac{R-r}{R+r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(a)$$

가 성립한다. 이 부등식을 **Harnack의 부등식**이라고 부른다.

예를 들어 u 가 $B(a, R)$ 에서 조화적이고 음이 아니면

$$u(z) \in \left[\frac{u(a)}{3}, 3u(a) \right] \text{ for } z \in B(a, 2^{-1}R)$$

이다.

정리 18.5 u_n 이 $0 \leq u_i \leq u_{i+1}$ 이고 G 에서 조화적인 함수열이라고 하자. 그러면 G 의 긴밀부분집합에서 $n \rightarrow \infty$ 일 때 균등하게 $u_n(z) \rightarrow +\infty$ 이거나, 또는 u_n 은 G 의 긴밀부분집합에서 적당한 조화함수 u 에 균등수렴한다. 이 명제를 **Harnack의 정리**라고 부른다.

증명 점 $a \in G$ 에 대하여 D 를 중심이 a 이고 G 에 포함되는 원판이라고 하자. 그러면 상수 $C > 1$ 이 존재하여 $z \in D$ 에 대하여

$$u_n(z) \leq C u_n(a), \quad u_n(a) \leq C u_n(z)$$

를 만족시킨다. 따라서 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $u_n(a)$ 가 유계일 필요충분 조건은 임의의 $z \in D$ 에 대하여 $u_n(z)$ 가 유계인 것이다. 이로써 u_n 의 함수값이 0이 되는 점들의 집합은 여단한집합이므로 공집합이거나 G 자신이 된다. 공집합인 경우 $u_n(z) \rightarrow +\infty$ 이고 이 극한은 원판들에 의하여 덮인 집합 위에서 균등하므로 G 의 임의의 긴밀부분집합 위에서 균등하다. G 자신이 경우 임의의 a 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a) \in \mathbb{C}$ 이고, $n \geq m$, $z \in D$ 일 때

$$u_n(z) - u_m(z) \leq C[u_n(a) - u_m(a)]$$

이므로 이 수열은 D 위에서 균등적으로 Cauchy 수열이다. 따라서 D 위에서 균등수렴한다. 다시 앞에서와 같은 논법으로 이것은 긴밀부분집합에서 성립한다. ■

19. Dirichlet 문제의 해

앞장에서 언급한 것처럼 유계인 영역 G 와 함수 $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 G 에서 조화적이고 $\overline{G}$ 에서 연속이며 ∂G 에서 $f = u$ 인 함수 $u : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 찾는 문제를 **Dirichlet 문제**라고 부른다. 이 장에서는 부분조화함수의 개념과 Dirichlet 문제의 해를 살펴보자.

정의 19.1 u 가 영역 G 에서 연속인 실함수라고 하자. 만약 $\overline{B}(a, r) \subseteq G$ 일 때마다

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

가 성립하면, u 를 **부분조화함수**(subharmonic)라고 부른다.

앞서 언급한 것처럼 부분조화함수는 최댓값 성질을 가진다. 또한 다음과 같은 성질을 가진다.

- 조화함수는 부분조화함수이다.
- 두 부분조화함수의 합은 부분조화함수이다.
- u, v 가 부분조화함수이면 $\max\{u, v\}$ 도 부분조화함수이다.

다음 보조정리는 부분조화성이 국소적 성질임을 밝힌다.

보조정리 영역 G 의 각 점 a 의 근방에서 u 가 부분조화적이면 u 는 G 에서 부분조화적이다.

증명 $\bar{D} = \bar{B}(a, r) \subseteq G$ 이고 $\tilde{u}$ 가 $\bar{D}$ 에서 연속이며 ∂D 에서 u 와 동일한 값을 갖고 D 위에서 조화적이라고 하자. Poisson 핵의 표현에 의하여

$$\tilde{u}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

이다. $u - \tilde{u}$ 가 D 의 각 점의 근방에서 부분조화적이고, 연결성에 의하여 D 에서 $u - \tilde{u}$ 가 최댓값을 갖는 점들의 집합은 공집합이거나 D 자신이 된다. 따라서 $\bar{D}$ 에서 $u - \tilde{u}$ 가 최댓값을 갖는 점은 경계에 있으므로 $u(a) \leq \tilde{u}(a)$ 이다. ■

보조정리 u 가 영역 G 에서 부분조화적이고 $\bar{D} = \bar{B}(a, r) \subseteq G$ 라고 하자. $\bar{D}$ 에서 $\tilde{u}$ 를 정의하되 ∂D 와 $G \setminus \bar{D}$ 에서 $\tilde{u} = u$ 이고 D 에서 조화적인 함수로 정의하자. 그러면 $\tilde{u}$ 는 G 에서 부분조화적이다.

증명 명백히 $\tilde{u}$ 는 D 와 $G \setminus \bar{D}$ 에서 연속이고 부분조화적이다. 각 $a \in \partial D$ 에서 $\tilde{u}$ 가 a 를 중심으로 하는 원 위의 평균값에 의하여 유계임을 보여야 한다. $u - \tilde{u}$ 는 D 와 0 에서 부분조화적으로 D 위에서 $u \leq \tilde{u}$ 이고 따라서 G 위에서도 성립한다. 이로써

$$\begin{aligned} \tilde{u}(a) = u(a) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(a + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

가 성립한다. ■

G 가 유계인 영역이라고 하자. 만약 u 가 G 에서 조화적이고 G 의 경계에서 연속이며 v 가 G 의 경계에서 u 보다 작은 값을 갖는 부분조화함수라고 하자. 그러면 최댓값 성질에 의하여 G 에서 $v \leq u$ 가 성립한다. 따라서 Dirichlet 문제의 답을 구할 때, 경계에서 주어진 함수를 넘지 않는 가장 큰 함수를 구하는 것이 바람직하다. O. Perron의 방법에 따라 해를 구해보자.

f 가 ∂G 에서 유계인 실함수라고 하자. 임의의 $a \in \partial G$ 에 대하여

$$\lim_{z \rightarrow a} v(z) \leq f(a)$$

를 만족시키고 G 에서 부분조화적인 함수 v 들의 모임을 **Perron 집합**이라고 부르고 $P(f, G)$ 로 나타내자. $P(f, G)$ 는 $\min f$ 를 넘지 않는 모든 상수를 포함하므로 공집합이 아니다.

보조정리 $v \in P(f, G)$ 이면 G 에서 $v \leq \sup f$ 이다.

이제 Perron 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$u(z) = \begin{cases} \sup\{v(z) \mid v \in P(f, G)\} & \text{if } z \in G \\ f(z) & \text{if } z \in \partial G \end{cases}$$

먼저 Perron 함수가 G 에서 조화적임을 보인 후, G 위에서 적절한 조건 하에 이 함수를 $\bar{G}$ 로 확장시킬 것이다.

보조정리 Perron 함수는 조화함수이다.

증명 원판 D 에 대하여 $\bar{D} \subseteq G$ 이고, $a \in D$ 가 임의로 주어졌다고 하자. $v_n(a) \rightarrow u(a)$ 인 $v_n \in P(f, G)$ 를 택하자. $v_1, v_2, \dots$, v_n 중 가장 큰 값을 V_n 이라고 하고 $\tilde{V}_n$ 을 정의하되 D 에서 V_n 을 넘지 않고 D 에서 조화적이며 $\bar{D}$ 에서 연속이 되도록 하자. V_n 과 $\tilde{V}_n$ 은 부분조화적이고, 명백히 V_n 은 단조증가하므로 $\tilde{V}_n$ 도 단조증가한다. 이들 모두는 $P(f, G)$ 에 속하므로 u 에 의하여 유계이지만, $v_n \leq V_n \leq \tilde{V}_n$ 이다. 따라서 $\tilde{V}_n(a) \nearrow u(a)$ 이다. Harnack의 정리에 의하여 D 에서 $\tilde{V}_n$ 은 적당한 조화함수 V 에 수렴한다. 여기서 $V(a) = u(a)$ 가 된다. 이제 b 가 D 의 다른 점일 때 $V(b) = u(b)$ 임을 보임으로써 u 가 D 에서 조화적임을 보일 것이다.

함수열 $\phi_n \in P(f, G)$ 를 택하되 $\phi_n(b) \rightarrow u(b)$ 가 되도록 하고, $w_n = \max(\phi_n, v_n) \in P(f, G)$ 라고 하자. V_n 과 $\tilde{V}_n$ 을 정의했던 것과 같은 방법으로, w_n 으로부터 W_n 과 $\tilde{W}_n$ 을 정의하자. 그러면 $w_n \geq v_n$, $W_n \geq V_n$, $\tilde{W}_n \geq \tilde{V}_n$ 이고 W_n 은 $W \geq V$ 인 적당한 조화함수 W 에 수렴하며 $W(b) = u(b)$ 이다. 또한 $W(a) = u(a) = V(a)$ 이므로 $V - W$ 는 D 에서 음이 아닌 조화함수이고 a 에서 최댓값을 가진다. 따라서 D 에서 $V = W$ 이고 $V(b) = u(b)$ 이다. ■

이제 Perron 함수가 경계에서 연속임을 보이자.

정의 19.2 G 가 유계인 영역이고 $z_0 \in \partial G$ 라고 하자. G 에서 조화적이고 $\bar{G}$ 에서 연속인 함수 ϕ 가 $\bar{G} \setminus \{z_0\}$ 에서 양의 값을 가지며 z_0 에서 영의 값을 가질 때 ϕ 를 z_0 에서 G 의 **경계함수**(barrier function)라고 부른다.

예를 들어 z_0 를 지나고 $\bar{G} \setminus \{z_0\}$ 가 직선에 의해 분할된 한 열린 반평면에 포함된다. 반평면을 적당한 $b \in \mathbb{C}$ 에 대하여 부등식 $\text{Im}[(z - z_0)/b] > 0$ 의 꼴로 나타낼 수 있다고 해도 일반성을 잃지 않는다. 그러면 $\text{Im}[(z - z_0)/b]$ 는 z_0 에서 G 의 경계함수가 된다.

다음으로 제곱근의 분지를 사용할 때 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 에서 정의된 함수 $\sqrt{1 - 1/z}$ 를 생각하자. 이 함수는 $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ 에서 해석적이고 1에서 0의 값을 갖는 함수로 확장되며 실수부는 $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ 에서 양수이다. 따라서 만약 $z_0 = 1$ 이 ∂G 에 속하고 $[0, 1]$ 과 G 가 만나는 유일한 점이면 $\text{Re} \sqrt{1 - 1/z}$ 를 z_0 에서 G 의 경계함수로 사용할 수 있다. 비슷하게 경계점 z_0 에 대하여, $\bar{G}$ 와 z_0 에서만 만나는 선분이 존재할 때, z_0 에서 G 의 경계함수가 존재한다. 따라서 매끄러운 영역이나 다각형 영역, 원판에서 선분을 제외한 영역 등 다양한 영역의 모든 경계점에서 경계함수가 존재한다. 경계함수를 갖지 않는 영역의 대표적인 예로서는 구멍 뚫린 원판을 들 수 있다.

정리 19.3 G 가 유계인 영역이고 f 가 ∂G 에서 유계이며 u 가 그에 대응하는 Perron 함수라고 하자. 만약 $z_0 \in \partial G$ 가 경계함수를 갖고 f 가 z_0 에서 연속이면 $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = f(z_0)$ 이다.

증명 먼저 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 G 에서 조화적이고 $\bar{G}$ 에서 연속이며 ∂G 에서 $w > f$ 이고 $w(z_0) = f(z_0) + \epsilon$ 을 만족시키는 함수 w 가 존재함을 보이자. D 가 z_0 를 중심으로 하고 $z \in \partial G \cap D$ 일 때마다 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ 이 성립하게 하는 원판이라고 하자. ∂G 에서 $|f|$ 의 최댓값을 M 이라고 하고 $G \setminus D$ 에서 경계함수 ϕ 의 최솟값을 m 이라고 하자. 그러면 $m > 0$ 이다.

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\phi(z)}{m} [M - f(z_0)] + f(z_0) + \epsilon \\ &= \left[\frac{\phi(z)}{m} - 1 \right] [M - f(z_0)] + M + \epsilon \end{aligned}$$

이라고 하자. 그러면 $z \in \partial G \cap D$ 에 대해서는

$$w(z) \geq f(z_0) + \epsilon > f(z)$$

이고, $z \in \partial G \setminus D$ 에 대해서는

$$w(z) > M \geq f(z)$$

가 성립한다. 따라서 경계에서 $w > f$ 이고, $w(z_0) = f(z_0) + \epsilon$ 이 성립한다.

$v \in P(f, G)$ 이면 G 에서 $v \leq w$ 가 성립한다. 이것은 임의의 v 에 대하여 성립하므로 G 에서 $u \leq w$ 가 성립하며,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) \leq w(z_0) = f(z_0) + \epsilon$$

이 성립한다. ϵ 은 임의의 양수이므로

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) \leq f(z_0)$$

이 성립한다. 다음으로

$$\begin{aligned} v(z) &= f(z_0) - \epsilon - \frac{\phi(z)}{m} [M + f(z_0)] \\ &= \left[1 - \frac{\phi(z)}{m} \right] [M + f(z_0)] - M - \epsilon \end{aligned}$$

이라고 하자. 그러면 ∂G 위에서 $v < f$ 이며, $v(z_0) = f(z_0) - \epsilon$ 이다. $v \in P(f, G)$ 이고 G 위에서 $u \geq v$ 이므로

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) \geq f(z_0) - \epsilon$$

이 성립한다. ϵ 은 임의의 양수이므로

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) \geq f(z_0)$$

을 얻는다. ■

이로써 Dirichlet 문제의 해가 완성되었다.

따름정리 G 가 복소평면의 유계인 영역이고 경계의 각 점에서 경계함수를 가지며 f 가 ∂G 에서 연속인 함수라고 하자. 그러면 G 에서의 경계함수는 Dirichlet 문제의 해가 된다.

20. 반사원리

이 장에서는 조화함수의 반사원리와 해석적 함수의 반사원리를 살펴보자. 반사원리를 설명하기 위하여 다음과 같은 용어를 사용하자. — 영역 G 에 대하여 $z \in G$ 일 때마다 $\bar{z} \in G$ 이면 G 를 **대칭영역**이라고 부른다.

정리 20.1 G 가 실수축에 대하여 대칭인 영역이라고 하자. G 와 상반평면의 교집합을 G_+ , 하반평면과의 교집합을 G_- , 실수축과의 교집합을 G_0 이라고 하자. u 가 $G_+ \cup G_0$ 에서 연속인 실함수이고 G_+ 에서 조화적이며 G_0 에서 영의 값을 가진다고 하자. 그러면 u 는 G 에서 조화적인 함수로 확장될 수 있으며, 확대함수는 유일하게 결정되고, $z \in G_-$ 에 대하여 $u(z) = -u(\bar{z})$ 이다. 이 명제를 **조화함수에 대한 반사원리**라고 부른다.

증명 그러한 확대함수가 존재한다면 유일성은 자명하므로, 여기서 주어진 함수가 G 에서 조화적인 함수를 결정함을 보이자. 이 함수가 $z_0 \in G_0$ 의 근방에서 조화적임을 보이면 충분하다.

평행이동과 확대를 이용하면 일반성을 잃지 않고 $z_0 = 0$ 이고 g 가 닫힌단위원판 $\bar{D}$ 를 포함한다고 할 수 있다. $\bar{D}$ 에서 $u|_{\partial D}$ 에 관한 Dirichlet의 해를 U 라고 하자. Poisson 핵의 표현에 의해 실수 구간 $(-1, 1)$ 에서 $U = 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 상반원의 경계 전체와 하반원의 경계 전체에서 $U = u$ 이다. 두 반원에서 U 와 u 는 조화적이므로 그들은 일치한다. 따라서 U 와 마찬가지로 u 는 원판 전체에서 조화적이다. ■

정리 20.2 G , G_+ , G_- 가 정리 20.1에서와 동일한 것이라고 하자. f 가 $G_+ \cup G_0$ 에서 연속인 복소함수이고 G_+ 에서 해석적이며 G_0 에서 실숫값을 가진다고 하자. 그러면 f 는 G 전체에서 조화적인 함수로 확장될 수 있으며, 확대함수는 유일하게 결정되고 $z \in G_-$ 에 대하여 $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 이다. 이 명제를 **해석적 함수에 대한 반사원리**라고 부른다.

증명 $\text{Im} f$ 와 조화공액함수에 정리 20.1의 증명법을 적용하면 결과를 얻는다. 또는 Morera의 정리를 이용하여 직접 증명해도 된다. ■

참고 위 정리에서 대칭축은 실수축이 아닌 임의의 직선이 될 수 있다. 따라서 G 가 적당한 직선에 대하여 대칭이고, 잘린 한 쪽 반평면과 직선 위에서 해석적인 함수는 G 전체에서 해석적인 함수로 확장될 수 있다.

평행이동과 회전을 이용하면, f 가 대칭축 위에서 실숫값을 가진다는 조건을 f 에 의하여 직선이 다른 직선에 대응된다는 것으로 바꾸어도 동일한 결과를 얻는다.

반사원리를 응용한 대표적인 예로서 **해석적 확장**(analytic continuation)을 들 수 있다. 예를 들어 f 가 사각형 영역을 자기 자신에 해석적으로 대응시키며 경계를 경계에 대응시키면 반사원리를 반복 적용하여 f 를 정함수로 확장할 수 있다.

반사원리는 직선에 대하여 대칭인 경우뿐만 아니라 원에 대하여 대칭인 경우에도 적용할 수 있다.

정리 20.3 f 가 단위원판에서 해석적이고 그 폐포에서 연속이며 경계에서 실숫값을 가진다고 하자. 그러면 f 는 정함수로 확장되며 확대함수는 f 에 따라 유일하게 결정된다. 그리고 확대함수는 $|z| > 1$ 에 대하여 $f(z) = \overline{f(1/\bar{z})}$ 이다.

증명 함수 g 를

$$g(z) = f\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

라고 정의하자. 그러면 g 는 상반평면을 $\mathbb{C}$ 에 대응시키고 실수축을 실수축에 대응시키는 일대일함수이다. g 에 반사원리를 적용하면 하반평면의 점 z 에 대하여

$$f\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \overline{f\left(\frac{1+i\bar{z}}{1-i\bar{z}}\right)}$$

를 얻는다. 즉 원판 외부의 점 w 에 대하여

$$f(w) = \overline{f(1/\bar{w})}$$

를 얻는다. ■

반사원리를 응용하는 예로서 단위원판에서 해석적인 함수 f 를 원판의 경계인 원을 원에 대응시키도록 연속적으로 확장하는 경우를 생각할 수 있다. $|z| > 1$ 에 대하여

$$f(z) = \frac{1}{\overline{f(1/\bar{z})}}$$

이라고 하면 f 는 $\mathbb{C}_\infty$ 에서의 함수가 된다.

$$\phi(z) = \frac{1+iz}{1-iz}$$

에 대하여 $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$ 에 반사원리를 적용하면 위와 같은 함수를 얻는다. 구한 확대함수는 f 의 영점의 대칭점에서만 극을 가지고 그 외에서는 해석적이다. 0에서 f 의 함숫값이 0인지 아닌지에 따라 무한대점 ∞ 도 확대함수의 제거 가능한 특이점이거나 극이 된다. 따라서 확대함수는 $\mathbb{C}_\infty$ 에서 유한 개의 극을 갖는 유리형 함수이다. 즉 f 는 유리함수이다.

참고문헌

- Douglas N. Arnold, *Complex Analysis Lecture Note*, Department of Mathematics, Penn State University, 1997.
- James R. Munkres, *Topology* (2ed), Prentice Hall, 2000.
- John B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.
- Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1966.
- Raghavan Narasimhan, *Complex Analysis in One Variable*, Birkhäuser, 1985.
- Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (3ed), McGraw-Hill, 1976.
- Walter Rudin, *Real and Complex Analysis* (3ed), McGraw-Hill, 1987.
- Wilfred Kaplan, *Advanced Calculus* (5ed), Addison Wesley, 2002.

문서정보

- 만드인 : Sooji Shin, soojishin@live.com, <http://www.soojishin.com>
- 만드날 : 2011년 10월 17일 (1판)
- 이 문서를 개인 학습 용도로만 사용하세요.