

자코비안의 미분(Differentiation of Jacobian)

KITECH 양광웅 작성

Page365@gmail.com

변환 행렬의 미분

${}^{i-1}A_i(q_i)$ 의 q_i 로 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial {}^{i-1}A_i}{\partial q_i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -c\theta_i s\psi_i & -s\phi_i s\theta_i s\psi_i - c\phi_i c\psi_i & -c\phi_i s\theta_i s\psi_i + s\phi_i c\psi_i & 0 \\ c\theta_i c\psi_i & s\phi_i s\theta_i c\psi_i - c\phi_i s\psi_i & c\phi_i s\theta_i c\psi_i + s\phi_i s\psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for z-axis revolute joint} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for z-axis prismatic joint} \\ \begin{bmatrix} -s\theta_i c\psi_i & s\phi_i c\theta_i c\psi_i & c\phi_i c\theta_i c\psi_i & 0 \\ -s\theta_i s\psi_i & s\phi_i c\theta_i s\psi_i & c\phi_i c\theta_i s\psi_i & 0 \\ -c\theta_i & -s\phi_i s\theta_i & -c\phi_i s\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for y-axis revolute joint} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for y-axis prismatic joint} \\ \begin{bmatrix} 0 & c\phi_i s\theta_i c\psi_i + s\phi_i s\psi_i & -s\phi_i s\theta_i c\psi_i + c\phi_i s\psi_i & 0 \\ 0 & c\phi_i s\theta_i s\psi_i - s\phi_i c\psi_i & -s\phi_i s\theta_i s\psi_i - c\phi_i c\psi_i & 0 \\ 0 & c\phi_i c\theta_i & -s\phi_i c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for x-axis revolute joint} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{for x-axis prismatic joint} \end{cases}$$

T_i 의 q_k 로의 미분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_i = T_{i-1} A_i,$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_k} = \frac{\partial T_{i-1}}{\partial q_k} A_i + T_{i-1} \frac{\partial^{i-1} A_i}{\partial q_k}$$

위 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_k} = \begin{cases} 0 & \text{if } k > i \\ T_{i-1} \cdot \frac{\partial^{i-1} A_i}{\partial q_k} & \text{if } k = i \\ \frac{\partial T_{i-1}}{\partial q_k} \cdot A_i & \text{if } k < i \end{cases} \quad \text{for } i = 1, \dots, n$$

자코비안의 미분

$\frac{\partial T_i}{\partial q_k}$ 의 구조는 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial q_k} & \frac{\partial o_i}{\partial q_k} & \frac{\partial a_i}{\partial q_k} & \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

자코비안의 q_k 에 대한 미분 $\frac{\partial J}{\partial q_k}$ 의 i 번째 열(column)은 다음과 같다.

$$\frac{\partial J_i}{\partial q_k} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial q_k} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{for a } \textit{prismatic} \text{ joint} \\ \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_k} - \frac{\partial p_{i-1}}{\partial q_k} \right) \times a_{i-1} + p_{i-1} \times \frac{\partial a_{i-1}}{\partial q_k} \\ \frac{\partial a_{i-1}}{\partial q_k} \end{bmatrix} & \text{for a } \textit{revolute} \text{ joint} \end{cases} \quad \text{for } i = 1, \dots, n$$

자코비안의 시간에 대한 미분 (time derivative) $\dot{J}(q, \dot{q})$ 은 다음과 같이 구한다.

$$\dot{J} = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial J}{\partial q_k}$$