기하벡터 개념 및 공식

1. 이차곡선(평면곡선)

x와y에 대한 이차방정식

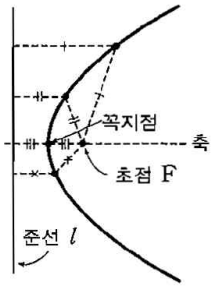
$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0\ (AB\neq 0)$$

으로 나타내어지는 곡선을 이차곡선이라 한다. 원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 이차곡선이다.

2. 포물선의 정의

(1) 포물선 : 평면 위의 한 정점F와 이 점을 지나지 않는 한 정직선 l로부터 같은 거리에 있는 점의 자취를 포물선이라 한다.

(2) 용어의 정의 : 정직선l을 포물선의 준선, 정점F를 포물선의 초점이라 한다.
포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축이라하고, 포물선과 그 축과의 교점을 포물선의 꼭짓점이라 한다.



3. 포물선의 방정식의 표준형

(1) 초점이F(p, 0)이고 준선이$x=-p$인 포물선의 방정식

$y^2=4px$ (단, $p>0$)

(2) 초점이F(0, p)이고 준선이$y=-p$인 포물선의 방정식

$x^2=4py$ (단, $p>0$)

4. 포물선의 방정식의 일반형

(1) x축에 평행한 축을 가지는 포물선의 방정식

$y^2+Ax+By+C=0\ (단, A\neq 0)$(⇦ $(y-b)^2=4p(x-a)$의 꼴)

(2) y축에 평행한 축을 가지는 포물선의 방정식

$x^2+Ax+By+C=0\ (단, B\neq 0)$(⇦ $(x-a)^2=4p(y-b)$의 꼴)

4. 포물선과 직선의 위치관계

포물선$y^2=4px\ (p\neq 0)$와 직선$y=mx+n\ (m\neq 0)$에서 교점의 개수는
이 두 방정식을 연립한

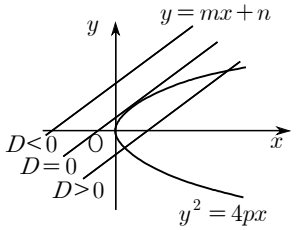
$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$

에서 판별식을D라 하면 다음과 같다.

(1) $D>0$ ⟷ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$ ⟷ 한 점에서 만난다.(접한다).

(3) $D<0$ ⟷ 만나지 않는다.



5. 타원의 정의

평면 위의 두 정점에서의 거리의 합이 일정한 점 전체의 집합을 타원이라 하고
이 때 두 정점을 타원의 초점이라고 한다. 그림에서

$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$(일정)

이라 할 때, 점P의 자취가 타원이고F, F′이 초점이다.

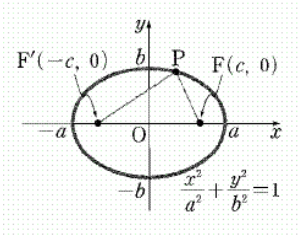
$\overline{AA'}$을 장축, $\overline{BB'}$을 단축이라 하고A, A′, B, B′을 타원의 꼭짓점이라 한다.

6. 타원의 방정식의 표준형

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>b>0$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$)

장축의 길이 : $2a$, 단축의 길이 : $2b$

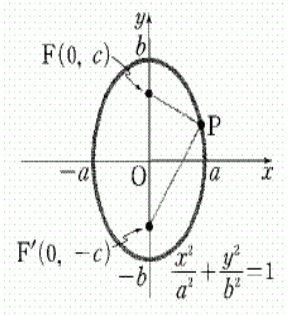
초점 : F(c, 0), F′(−c, 0)



(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b>a>0$, $c=\sqrt{b^2-a^2}$)

장축의 길이 : $2b$, 단축의 길이 : $2a$

초점 : F(0, c), F(0,−c)



7. 평행이동

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x 축으로 m 만큼, y 축으로 n 만큼 평행이동 : $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$

8. 타원의 방정식의 일반형

$Ax^2+By^2+2Fx+2Gy+C=0$(단, $A\neq B$, $AB>0$)

1. 타원과 직선의 위치관계

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$에서 교점의 개수는 이 두 방정식을 연립한

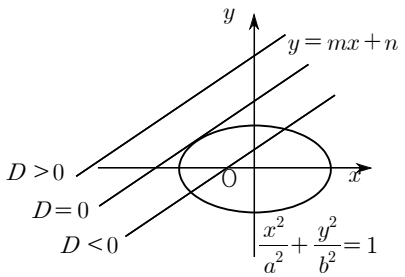
$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$

에서 판별식을 D라 하면 다음과 같다.

(1) $D>0$ ⟷ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$ ⟷ 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $D<0$ ⟷ 만나지 않는다.



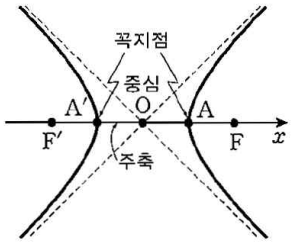
9. 쌍곡선의 정의

평면 위의 두 정점에서 거리의 차가 일정한 점 전체의 집합을 쌍곡선이라 하고 두 정점을 쌍곡선의 초점이라 한다. 그림에서

$$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a(\text{일정})$$

이라 할 때, 점P의 자취가 쌍곡선이고F, F′이 초점이다.

A, A′을 쌍곡선의 꼭짓점, $\overline{AA'}$을 주축, $\overline{BB'}$을 켤레축이라 하며 $\overline{AA'}$의 중점O를 쌍곡선의 중심이라 한다.

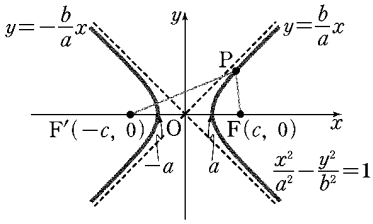


10. 쌍곡선의 방정식의 표준형

(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(단, $a>0, b>0, c=\sqrt{a^2+b^2}$)

주축의 길이 : $2a$, 초점 : $F(c, 0), F'(-c, 0)$

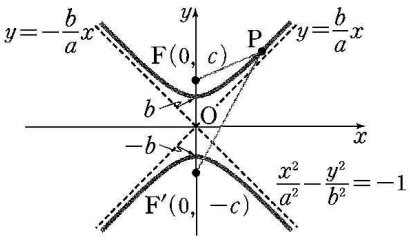
꼭짓점의 좌표 : $A(a, 0), A'(-a, 0)$



(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$(단, $a>0, b>0, c=\sqrt{a^2+b^2}$)

주축의 길이 : $2b$, 초점 : $F(0, c), F'(0, -c)$

꼭짓점의 좌표 : $B(0, b), B'(0, -b)$



11. 쌍곡선의 방정식의 일반형

$Ax^2+By^2+2Fx+2Fy+C=0$(단, $AB<0$)

12. 쌍곡선의 점근선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{b}{a}x\ (a>0, b>0) \longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

13. 쌍곡선과 직선의 위치관계

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$과 직선 $y=mx+n$에서 교점의 개수는

이 두 방정식을 연립한

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2m^2n^2x-a^2(n^2+b^2)=0$$

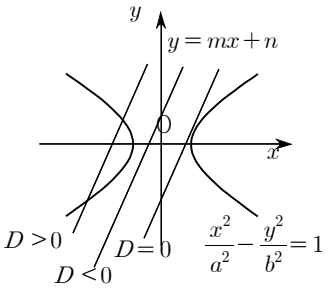
$$\left(\text{단}, m\neq\pm\frac{b}{a}\right)$$

에서 판별식을 $D(b^2-a^2m^2\neq 0)$라고 하면 다음과 같다.

(1) $D>0 \longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0 \longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $D<0 \longleftrightarrow$ 만나지 않는다



14. 음함수와 양함수의 뜻

y가 x의 함수일 때, $f(x,y)=0$꼴의 함수를 음함수라 하고,
$y=f(x)$꼴의 함수를 양함수라 한다.

15. 음함수의 미분법

y가 x의 함수일 때, $\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$

위의 성질을 이용하여 $x^2+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}1$에서 $2x+\frac{d}{dy}y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0,\quad 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

16. 매개변수의 미분법

$x=f(t)$, $y=g(t)$가 각각 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$ 이면 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

17. 이차곡선과 직선의 위치관계

(1) 이차곡선과 직선의 교점을 구하는 방정식의 판별식을 D라 할 때

⑴ D >0 ⇔ 이차곡선과 직선은 두 점에서 만난다.

⑵ D $=0$ ⇔ 이차곡선과 직선은 접한다.

⑶ D <0 ⇔ 이차곡선과 직선은 만나지 않는다.

(2) 이차곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선

이차곡선 $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선은 $Ax_1x+By_1y+C\cdot\frac{x+x_1}{2}+D\cdot\frac{y+y_1}{2}+E=0$이다.

① $y^2=4px$인 포물선위의 점 $(x_1,\ y_1)$를 지나는 접선의 방정식 $y_1y=4p\times\frac{x+x_1}{2}$

② $x^2=4py$ 인 포물선위의 점 $(x_1,\ y_1)$를 지나는 접선의 방정식 $x_1x=4p\times\frac{y+y_1}{2}$

③ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 인 타원위의 점 $(x_1,\ y_1)$를 지나는 접선의 방정식 $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

④ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$인 쌍곡선 위의 점 $(x_1,\ y_1)$를 지나는 접선의 방정식 $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

(3) 기울기가 m 인 접선

포물선 $y^2=4px\,(p\neq 0)$에 접하는 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$ (단, $m\neq 0$)

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$

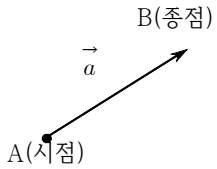
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$에 접하는 직선의 방정식 $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$

18. 벡터의 뜻

(1) 스칼라(scalar) : 크기만을 가지는 양 [예] 길이, 질량, 넓이
벡터(vector) : 크기와 방향을 가지는 양 [예] 속도, 가속도, 힘

(2) 그림과 같이 유향선분AB로 나타내어지는 벡터를 기호로는
$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ 로 나타내고,A 를 벡터$\overrightarrow{AB}$의 시점, B 를 벡터$\overrightarrow{AB}$의 종점이라 한다.



(3) 벡터를 문자로 나타낼 때에는 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$ 등의 기호를 사용한다.

(4) 벡터$\overrightarrow{AB}$와$\vec{a}$의 크기를 기호로$|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$로 나타내고 선분의 길이를 의미한다. 즉,$|\overrightarrow{AB}|=|\overline{AB}|$

19. 여러 가지 벡터

(1) 영벡터 : 시점과 종점이 일치하는 벡터, 크기는0이고 $\vec{0}$으로 나타낸다.

(2) 단위벡터 : 크기가 1인 벡터. 즉,$|\overrightarrow{AB}|=1$인 벡터

(3) 역벡터 : 크기가 같고 방향이 반대인 벡터. 즉, $\overrightarrow{AB}$의 역벡터는 $-\overrightarrow{AB}$ 또는 $\overrightarrow{BA}$

(4) 평면벡터(이차원벡터) : 평면 위에서 유향선분으로 나타내어지는 벡터

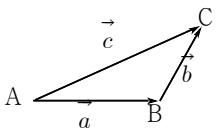
(5) 공간벡터(삼차원벡터) : 공간에서의 유향선분으로 나타내어지는 벡터

20. 벡터의 상등

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 크기가 같고 방향이 같다. $\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}$
즉,$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$이고$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$이면$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

21. 벡터의 덧셈

(1) 삼각형법
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$라 할 때, 삼각형의 변$\overrightarrow{AC}$ $(=\vec{c})$를$\vec{a}$와$\vec{b}$의 합이라 하고$\vec{a}+\vec{b}$ $(=\vec{c})$로 나타낸다.



$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(2) 평행사변형법
$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하고$\overrightarrow{OA}$와$\overrightarrow{OB}$를 두 변으로 하는 평행사변형OBCA를 만들 때,
$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$이므로$\overrightarrow{OC}$ $(=\vec{c})$는$\vec{a}$와$\vec{b}$의 합을 나타낸다.

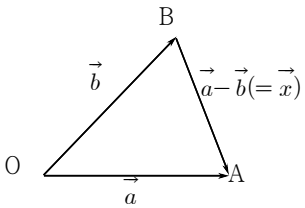
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$

22. 벡터의 덧셈의 기본 법칙

(1) 닫혀있다 : $\vec{a} \in V, \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} \in V$ (V는 모든 벡터의 집합)

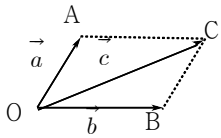
(2) 교환법칙 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(3) 결합법칙 : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



23. 벡터의 뺄셈

두 벡터$\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$
를 만족하는 벡터$\vec{x}$를$\vec{a}$에서$\vec{b}$를 뺀 차라고 하며
$\vec{a}-\vec{b}$ $(=\vec{x})$로 나타낸다.



오른쪽 그림에서$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하면
$\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$에서$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$
또, $\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$에서$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

24. 벡터의 실수배

임의의 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$에 대하여

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$일 때,

① $k > 0$이면, $k\vec{a}$의 크기는 $k|\vec{a}|$이고, $\vec{a}$와 같은 방향인 벡터

② $k < 0$이면, $k\vec{a}$의 크기는 $|k||\vec{a}|$이고, $\vec{a}$와 반대 방향인 벡터

③ $k=0$이면, $k\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a}=\vec{0}$일 때, 임의의 실수 k에 대하여 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

25. 벡터의 실수배에 관한 기본 법칙

실수 k, l과 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여

(1) 결합법칙 : $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$

(2) 분배법칙 : $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

26. 벡터의 평행

(1) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 같은 방향이거나 반대 방향일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며 기호로는 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$로 나타낸다.

(2) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$일 때,

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \leftrightarrow \vec{a}=t\vec{b}$ (단, $t \neq 0$인 실수)

$1 \cdot \vec{a}=\vec{a}$
$(-1) \cdot \vec{a}=-\vec{a}$
$0 \cdot \vec{a}=\vec{0}$

27. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 존재하기 위한 조건

서로 다른 세 점 A, B, C와 0이 아닌 임의의 실수 k에 대하여

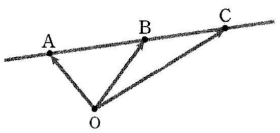
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 존재

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

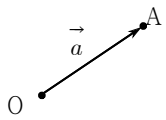
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}+(1-k)\overrightarrow{OA}$

(합 : 1)



28. 위치벡터

(1) 평면(또는 공간)에 한 점O를 정하면, 임의의 점A에 대하여,
유향성 분$\overrightarrow{OA}$로 표시되는 벡터$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$는 단 하나 정해진다.



(2) 역으로, 평면 위의 임의의 점A에 대하여$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$인 평면$\vec{a}$가 단 하나 정해진다.

(3) 시점을 한 점O로 고정시키면 평면벡터$\overrightarrow{OA}$와 평면의 한 점A는 1 : 1로 대응한다. 마찬가지로, 공간에 한 정점O를 정해 놓으면O를 시점으로 하는 공간벡터$\overrightarrow{OA}$와 공간의 한 점A는1 : 1로 대응한다. 이 때, 벡터$\vec{a}$를 점O에 대한 점A의 위치벡터라 한다.

29. 분점의 위치벡터

선분$\overline{AB}$를$m : n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을P, 외분하는 점을Q, 중점을M이라 하고 점A, B, P, Q, M의 위치벡터를 각각$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$이라 하면

(1) $\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

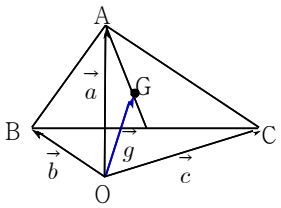
(2) $\vec{q}=\overrightarrow{OQ}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ (단, $m\neq n$)

(3) $\vec{m}=\overrightarrow{OM}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

30. 무게중심의 위치벡터

△ABC의 꼭짓점A, B, C의 위치벡터를 각각$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때,
△ABC의 무게중심G의 위치벡터 $\vec{g}$는

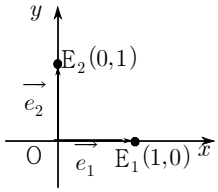
$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$



31. 평면벡터의 성분표시

(1) 단위벡터

좌표평면 위에서 원점O를 시점으로 하고 두 점$E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ 을 각각 종점으로 하는 두 단위벡터를$\overrightarrow{OE_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e_2}$로 나타내고 이들을 평면의 기본벡터 또는 기본단위벡터라 한다.



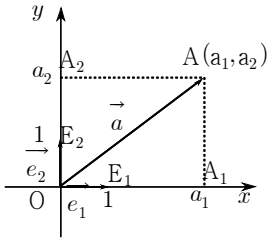
(2) 성분표시

오른쪽 그림과 같이 임의의 벡터$\vec{a}$에 대하여$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점A의 좌표를$A(a_1, a_2)$라고 하면 $\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$이므로 평면벡터$\vec{a}$는 다음과 같다.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

이때, 실수a_1, a_2를 벡터$\vec{a}$의 성분이라 하고a_1을x성분,a_2를 y성분이라고 한다.

또, 벡터$\vec{a}$를 성분을 이용하여$\vec{a}=(a_1, a_2)$로 나타내고, 이것을 평면벡터$\vec{a}$의 성분표시라고 한다.



32. 평면벡터의 크기와 서로 같을 조건

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$이고,k가 실수일 때

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

(2) $\vec{a}=\vec{b}$이면 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$

33. 평면벡터의 성분의 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$이고,k가 실수일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(2) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$

34. 평면벡터의 성분과 크기

$\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

35. 평면벡터의 평행

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$이고 성분이 모두0이 아닐 때

$\vec{a}\ /\!/\ \vec{b} \leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

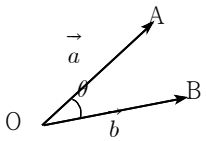
36. 내적의 뜻

(1) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 내적이라 한다.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$



[보충]

(1) $\vec{a} = \vec{0}$ 또는 $\vec{b} = \vec{0}$일 때는 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$으로 정한다.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 $\vec{a}\vec{b}$ 또는 $\vec{a} \times \vec{b}$로 쓰지 않는다.

37. 벡터의 내적의 성분 표시

(1) 평면벡터의 내적

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

38. 벡터의 내적의 연산법칙

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 평면 또는 공간에서의 벡터이고, k가 실수일 때,

(1) 교환법칙 : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(2) 배분법칙 : $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

(3) 결합법칙 : $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

39. 두 벡터가 이루는 각

(1) $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$가 이루는 각을 θ라 할 때,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\ \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$$

40. 벡터의 내적과 수직·평행조건

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$일 때

(1) $\vec{a} \perp \vec{b} \longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$일 때

$\vec{a} \perp \vec{b} \longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

(2) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$이면

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$]

[보충학습]

1. 중요정리

(1) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

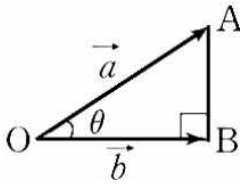
(2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

41. 벡터의 정사영

(1) 직각삼각형에서 벡터의 내적

오른쪽 직각삼각형 OAB에서 $|\vec{a}|\cos\theta = |\vec{b}|$이므로

⇨ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = (|\vec{a}|\cos\theta)|\vec{b}| = |\vec{b}||\vec{b}| = |b|^2$

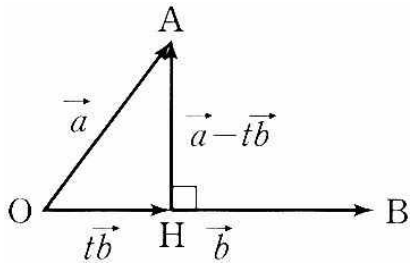


(2) 오른쪽 그림에서 $\vec{a}$의 $\vec{b}$ 위로의 정사영 벡터는 $\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$이다.

<설명> $\overrightarrow{OH} /\!/ \vec{b}$이므로 $\overrightarrow{OH} = t\vec{b}$ ∴ $\overrightarrow{HA} = \vec{a} - t\vec{b}$

$\overrightarrow{HA} \perp \vec{b}$이므로 $\overrightarrow{HA}\cdot\vec{b} = 0$에서 $(\vec{a} - t\vec{b})\cdot\vec{b} = 0$

∴ $t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$이므로 $\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$이다.



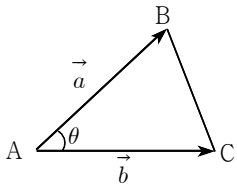
42. △ABC의 넓이

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$라 하고 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 θ라 할 때,

△ABC의 넓이 S는

$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$



특히, $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$일 때, $\triangle OAB = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$

[보충설명]

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이므로 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}}$

∴ $\triangle OAB = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

43. 방향벡터를 이용한 직선의 벡터방정식

(1) 점 $\mathrm{A}(\vec{a})$를 지나고 $\vec{d}$에 평행한 직선의 벡터방정식은 ⇨ $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{d}$ (단, t 는 임의의 실수)

이때, $\vec{d}$를 이 직선의 방향벡터라고 한다.

① 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(\vec{x})$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \vec{d}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t\vec{d} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{a} = t\vec{d} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$

② 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{d} = (l, m)$인 직선의 방정식은

$\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m}$ (단, $lm \neq 0$)

(2) 두 점을 지나느 직선의 방정식

① 두 점 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$를 지나는 직선의 벡터방정식은 ⇨ $\vec{x} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ (단, t는 임의의 실수)

두 점 A, B를 지나는 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(\vec{x})$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$

$\therefore \vec{x} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$

② 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (단, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$)

44. 두 직선이 이루는 각

방향벡터가 각각 $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$인 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각은 두 벡터 $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$가 이루는 각과 같다.

$\vec{0}$가 아닌 두 방향벡터 $\vec{d_1} = (a_1, a_2)$, $\vec{d_2} = (b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \pi)$라 하면 ⇨

$$\cos\theta = \frac{\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\ \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$$

45. 법선벡터를 이용한 직선의 벡터방정식

점 A의 위치벡터를 $\vec{a}$라 할 때, 점 A를 지나고 $\vec{n}$에 수직인 직선의 벡터방정식은 ⇨ $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

이때, $\vec{n}$을 이 직선의 법선벡터라고 한다.

(1) 구하는 직선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(\vec{x})$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$이고, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{x} - \vec{a}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

(2) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (a, b)$인 직선의 방정식은

$a(x-x_1) + b(y-y_1) = 0$

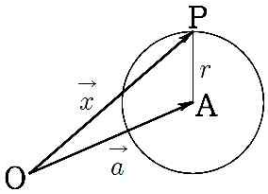
46. 중심과 반지름이 주어진 원과의 벡터방정식

평면에서 중심이 점 $\mathrm{A}(\vec{a})$이고 반지름이 r인 원의 벡터방정식은

$|\vec{x}-\vec{a}|=r \Leftrightarrow (\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})=r^2$

그림에서 원주 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(\vec{x})$라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r$

여기서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{x}-\vec{a}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=r \Leftrightarrow |\vec{x}-\vec{a}|=r$



47. 지름의 양 끝점이 주어진 원과 구의 벡터방정식

평면에서 두 점 $\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$를 지름의 양 끝으로 하는 원의 벡터방정식은

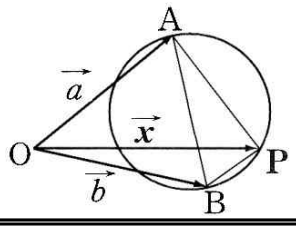
$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$

그림에서 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(\vec{x})$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$

$\therefore\ (\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$



48. $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$의 자취

평면 위의 세 정점 O, A, B에 대하여 점 P가 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (s, t는 실수)를 만족할 때,

① $s+t=1$ ⇨ P는 직선 AB 위의 점

② $s+t=1,\ s\geq 0,\ t\geq 0$ ⇨ P는 선분 AB 위의 점

③ $s+t\leq 1,\ s\geq 0,\ t\geq 0$ ⇨ P는 △OAB의 둘레 및 내부의 점

④ $0\leq s\leq 1,\ 0\leq t\leq 1$ ⇨ P는 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$를 두 변으로 하는 평행사변형의 둘레 및 내부의 점

[보충설명]

① $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$과 $s+t=1$에서 $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$이고, 변형하면

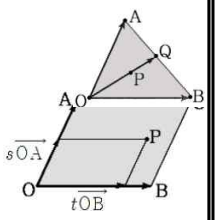
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$ ∴ $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ ……㉠

곧, $\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AB}$이므로 P는 직선 AB 위의 점이다.

② $s+t=1,\ s\geq 0,\ t\geq 0$에서 $0\leq t\leq 1$이므로 ㉠에서 P는 $\overline{AB}$ 위의 점이다.

③ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$의 양변을 $s+t$로 나누고 이를 $\overrightarrow{OQ}$라 하면

$\dfrac{\overrightarrow{OP}}{s+t}=\dfrac{s}{s+t}\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{s+t}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$ ……㉡



㉡에서 $\dfrac{s}{s+t}+\dfrac{t}{s+t}=1$이고 $s\geq 0,\ t\geq 0$이므로 Q는 $\overline{AB}$ 위의 점이다.

또한 ㉡에서 $\overrightarrow{OP}=(s+t)\overrightarrow{OQ}$이고 $0\leq s+t\leq 1$이므로 P는 $\overline{OQ}$ 위의 점이다.

따라서 P는 △OAB의 둘레 및 내부의 점이다.

④ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB},\ 0\leq s\leq 1,\ 0\leq t\leq 1$을 만족하는 점 P는

$s\overrightarrow{OA}\ (0\leq s\leq 1)$, $t\overrightarrow{OB}\ (0\leq t\leq 1)$

를 이웃 두 변으로 하는 평행사변형에서 O를 시점으로 하는 대각선의 종점이다.

따라서 구하는 영역은 오른쪽 그림의 평행사변형 OACB의 둘레 및 내부이다.

주어진 조건을 만족하는 점 P의 위치벡터 $\overrightarrow{OP}$의 성분을

⇨ $(x,\ y)$(평면에서) 또는 $(x,\ y,\ z)$(공간에서)라 놓고 식을 세운다.

49. 평면 운동에서의 속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치벡터의 성분이 (x, y)이고,
$x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내어질 때,
시각t에서 점 P의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$, 속력을 $|\vec{v}|$라고 하면

(1) $\vec{v}=(v_x, v_y)=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(f'(t), g'(t))$

(2) $\vec{a}=(a_x, a_y)=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t), g''(t))$

(3) $|\vec{v}|=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

50. 평면 운동에서의 이동 거리

(1) 시각 t에서 점 P의 위치벡터의 성분이 (x, y)이고, x, y가 시각 t의 함수일 때,
$t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(2) $x=a$에서 $x=b$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

51. 위치의 변화와 실제로 움직인 거리

수직선 위를 움직이는 점P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$,시각 $t=t_0$에서의 점 P의 위치를 $s(t_0)$라 할 때,

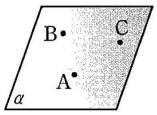
시각 t에서의 점P의 위치는 ➡ $s(t)=\underline{s(t_0)_{\rightarrow\text{처음 위치}}}+\underline{\int_{t_0}^{t} v(t)dt}_{\rightarrow\text{위치의 변화량}}$

시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 점 P의 위치의 변화량 ➡ $\int_a^b v(t)dt$

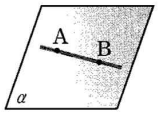
시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 점 P가 실제로 움직인 거리 ➡ $\int_a^b |v(t)|dt$

52. 공간도형의 기본 성질

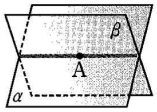
(1) 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점을 지나는
평면은 오직 하나 존재한다. (그림1)
(2) 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선 위의 모든 점은 그 평면 위에 있다.
이 때, 평면은 그 직선을 품는다고 한다.(그림2)
(3) 서로 다른 두 평면이 한 점을 공유하면 이 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.(그림3)



[그림 1]



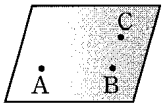
[그림 2]



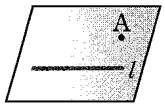
[그림 3]

53. 평면의 결정 조건

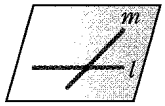
(1) 한 직선 위에 있지 않은 세 점(그림1)
(2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점(그림2)
(3) 만나는 두 직선(그림3)
(4) 평행한 두 직선(그림4)



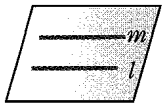
[그림1]



[그림2]



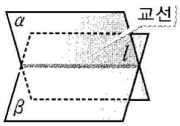
[그림3]



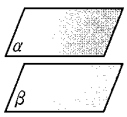
[그림4]

54. 두 평면의 위치관계

(1) 만난다(한직선을 공유한다.)



(2) 평행하다(공유점이 없다.) 만나지 않는다.



55. 직선과 평면의 위치 관계

(1) 두 직선의 위치 관계

공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

① 한 점에서 만난다.
② 평행하다.
③ 꼬인 위치에 있다.

(3) 두 평면의 위치 관계

① 만난다.
② 만나지 않는다. (평행)

(5) 수직에 대한 성질

① 직선 l이 평면 α에 수직일 때, l을 포함하는 모든 평면은 평면 α에 수직이다.
② 한 평면에 수직인 두 직선은 서로 평행하다.
③ 한 직선에 수직인 두 평면은 서로 평행하다.

(2) 직선과 평면의 위치관계

① 직선이 평면에 포함된다.
② 한 점에서 만난다.
③ 만나지 않는다. (평행)

(4) 직선과 평면의 평행

① 두 직선 l, m이 평행할 때, l을 포함하고 m을 포함하지 않는 평면 α는 m과 평행하다.
② 평면 α밖의 한 점 P에서 만나는 두 직선 l, m이 모두 α에 평행하면 l, m을 포함하는 평면 β는 α와 평행하다.

56. 두 직선이 이루는 각

두 직선 a, b에 평행한 두 직선 OA, OB가 이루는 각 AOB를 두 직선 a, b가 이루는 각이라 한다.

<참고> 공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 때, 한 직선을 적당히 평행이동하여 다른 한 직선과 만나게 한 다음, 이 두 직선이 이루는 각의 크기를 구한다.

57. 직선과 평면이 이루는 각

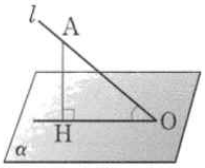
(1) 직선과 평면의 수직

① 직선 l이 평면 α위의 평행하지 않은 두 직선에 각각 수직일 때, 직선 l과 평면 α는 수직이다.

② 직선 l이 평면 α와 수직이면 l은 α위의 모든 직선과 수직이다.

(2) 직선과 평면이 이루는 각

직선 l이 평면 α와 점 O에서 만나고 l위의 한 점 A에서 α위에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle AOH$를 직선 l과 평면 α가 이루는 각이라 한다.



58. 이면각

(ⅰ) 두 평면의 교선 위의 한 점 O 에서 교선에 수직인 직선을 두 평면에 각각 그린다.

(ⅱ) 한 직선 위의 점 A 에서 다른 평면에 수선의 발 B 를 내린다.

(ⅲ) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 의 길이를 이용하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 구한다.

59. 삼수선의 정리

평면 α밖의 한 점을 P, 평면 α위의 점 O를 지나지 않는 한 직선 l과 l위의 한 점 A가 있을 때,

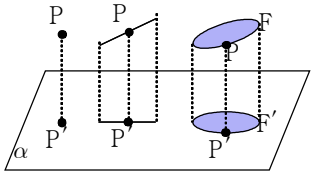
(1) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{OA}\perp l$ 이면 $\overline{PA}\perp l$

(2) $\overline{PO}\perp\alpha$, $\overline{PA}\perp l$이면 $\overline{OA}\perp l$

(3) $\overline{PA}\perp l$, $\overline{OA}\perp l$, $\overline{PO}\perp\overline{OA}$이면 $\overline{PO}\perp\alpha$

60. 정사영

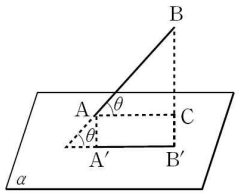
점P에서 평면α에 내린 수선의 발P′을 점P의 평면α 위로의 정사영이라 한다.
일반적으로, 도형F에 속하는 각 점의 평면α 위로의 정사영 전체로 이루어진
도형F′을 도형F의 평면α 위로의 정사영이라 한다. 이 때, 평면α를 투영면이라 한다.



61. 정사영의 길이

$\overline{AB}$의 평면α 위로의 정사영을$\overline{A'B'}$이라 하고, 직선AB가 평면α와 이루는
예각의 크기를θ라고 하면

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$



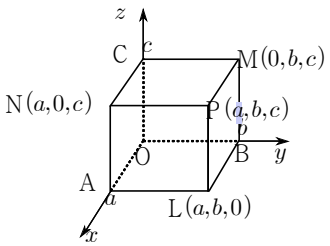
62. 정사영의 넓이

평면α 위의 도형F의 평면β 위로의 정사영을F′이라 하고,F, F′의 넓이를
각각S, S'라 할 때,α와β가 이루는 각의 크기를θ라 하면

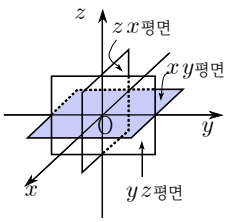
$$S'=S\cos\theta$$

63. 공간에서의 점의 좌표

(1) 공간의 점P에 대응하는 세 실수의
순서쌍(a,b,c)를 점P의 공간좌표라 하고 기호로P(a,b,c)와
같이 나타낸다.
이 때, a,b,c를 각각 점P의x좌표,y좌표,z좌표라 한다.



(2) x축,y축,z축을 직교 좌표축 또는 좌표축이라 하고
x축과y축이 결정하는 평면을xy평면
y축과z축이 결정하는 평면을yz평면
z축과x축이 결정하는 평면을zx평면
이라 하고 이 세 평면을 좌표평면이라 한다.



64. 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$,B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

특히, 원점O와 점A$(x,\ y,\ z)$ 사이의 거리는 $\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

65. 대칭점

점 P(a, b, c)에 대하여

(1) xy평면에 대하여 대칭인 점의 좌표 : $(a, b, -c)$

(2) yz평면에 대하여 대칭인 점의 좌표 : $(-a, b, c)$

(3) zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표 : $(a, -b, c)$

(4) x축에 대하여 대칭인 점의 좌표 : $(a, -b, -c)$

(5) y축에 대하여 대칭인 점의 좌표 : $(-a, b, -c)$

(6) z축에 대하여 대칭인 점의 좌표 : $(-a, -b, c)$

(7) 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표 : $(-a, -b, -c)$

66. 선분의 분점

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

(1) 선분AB를 $m : n\ (m>0, n>0)$으로 내분하는 점P의 좌표는

$$P\left(\frac{nx_2+mx_1}{m+n}, \frac{ny_2+my_1}{m+n}, \frac{nz_2+mz_1}{m+n}\right)$$

(2) 선분AB를 $m : n\ (m>0, n>0, m\neq n)$으로 외분하는 점Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{nx_2-mx_1}{m-n}, \frac{ny_2-my_1}{m-n}, \frac{nz_2-mz_1}{m-n}\right)$$

(3) 선분AB의 중점M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

67. 삼각형의 무게중심

세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$일 때 $\triangle ABC$의 무게중심G의 좌표는

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

68. 구의 방정식의 표준형

중심이 $(a,\ b,\ c)$, 반지름의 길이 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히, 원점이 중심, 반지름의 길이 r인 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=r^2$

69. 구의 방정식의 일반형

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0(\text{단},A^2+B^2+C^2-4D>0)$$

중심 : $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$

반지름의 길이 : $\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$

70. 구의 방정식 만들기

1. 중심 또는 반지름이 주어질 때 구의 방정식은$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$에 대입한다.
2. 네 점이 주어지면$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$에 대입한다.
3. (1) 두 점A, B를 지름의 양끝으로 하는 구

   (구의 중심) : $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점, (반지름) : $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$

   (2) 두 점 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지름의 양끝으로 하는 구

   $$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$
4. 구가xy평면,yz평면,zx평면과 만날 때는 각각$z=0,\ x=0,\ y=0$을 대입한다.

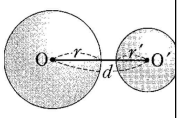
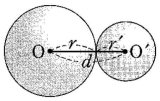
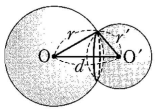
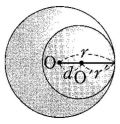
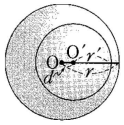
   또,x축과 만날 때는$y=0,\ z=0$을 대입한다.

71. 두 구의 위치 관계

두 구의 중심선과 중심거리

두 구의 중심 O, O′를 지나는 직선을 중심선이라 하고, 선분 OO′의 길이를 두 구의 중심거리라 한다.

두 구의 위치 관계

외부	외접	교선이 원이 되게 만남	내접	내부
				
$r+r'<d$	$r+r'=d$	$\lvert r-r'\rvert<d<r+r'$	$\lvert r-r'\rvert=d$	$\lvert r-r'\rvert>d$

72. 구와 평면의 교선

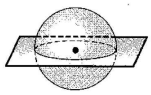
구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ …… ㉠에서

xy평면과의 교선 ➡ $z=0$을 ㉠에 대입 ➡ $(x-a)^2+(y-x)^2=r^2-c^2$

yz평면과의 교선 ➡ $x=0$을 ㉠에 대입 ➡ $(y-b)^2+(z-c)^2=r^2-a^2$

zx평면과의 교선 ➡ $y=0$을 ㉠에 대입 ➡ $(x-a)^2+(z-c)^2=r^2-b^2$

Tip 구와 평면의 교선



위의 그림에서 알 수 있듯이
구와 평면의 교선은 원이다.

73. 구와 축의 교점

구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ …… ㉠에서

x축과의 교점 ➡ $y=0$, $z=0$을 ㉠에 대입 ➡ x의 값 구하기

y축과의 교점 ➡ $x=0$, $z=0$을 ㉠에 대입 ➡ y의 값 구하기

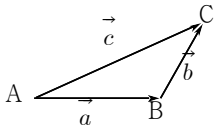
z축과의 교점 ➡ $x=0$, $y=0$을 ㉠에 대입 ➡ z의 값 구하기

74. 벡터의 덧셈

(1) 삼각형법

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$라 할 때, 삼각형의 변 $\overrightarrow{AC}$ $(=\vec{c})$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합이라 하고 $\vec{a}+\vec{b}$ $(=\vec{c})$로 나타낸다.

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



(2) 평행사변형법

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하고 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$를 두 변으로 하는 평행사변형OBCA를 만들 때, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$이므로 $\overrightarrow{OC}$ $(=\vec{c})$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합을 나타낸다.

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$

75. 벡터의 덧셈의 기본 법칙

(1) 닫혀있다 : $\vec{a}\in V, \vec{b}\in V \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}\in V$ (V는 모든 벡터의 집합)

(2) 교환법칙 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(3) 결합법칙 : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(4) 항등원$(\vec{0})$: 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(5) 역원 : 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{x}=\vec{x}+\vec{a}=\vec{0}$인 $\vec{x}$가 존재$(\vec{x}=-\vec{a})$

76. 벡터의 뺄셈

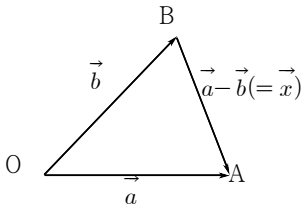
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$

를 만족하는 벡터 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라고 하며

$\vec{a}-\vec{b}$ $(=\vec{x})$

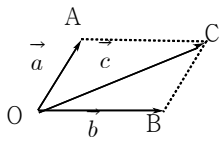
로 나타낸다.



오른쪽 그림에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하면

$\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$에서 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

또, $\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$



77. 벡터의 실수배

(1) 벡터의 실수배

임의의 실수 k 와 벡터 $\vec{a}$ 의 곱 $k\vec{a}$ 에 대하여

① $\vec{a} \neq 0$일 때,

(i) $k > 0$ 이면 $k\vec{a}$ 는 방향은 $\vec{a}$ 와 같고 크기는 $k|\vec{a}|$ 인 벡터이다.

(ii) $k < 0$ 이면 $k\vec{a}$ 는 방향은 $\vec{a}$ 와 반대이고 크기는 $|k||\vec{a}|$ 인 벡터이다.

(iii) $k = 0$ 이면 $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

② $\vec{a} = \vec{0}$ 일 때, 임의의 실수 k 에 대하여 $k\vec{a} = \vec{0}$ 이다.

(2) 벡터의 실수배의 성질

k, l 이 실수일 때, 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 에 대하여

① 결합법칙 : $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$

② 분배법칙 : $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{b}$

③ 분배법칙 : $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + l\vec{b}$

78. 입체도형에서의 벡터의 연산

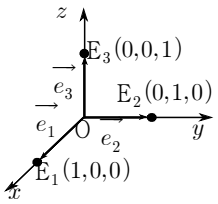
(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$임을 이용하여 기준이 되는 벡터의 연산으로 변형한다.

(2) 주어진 입체도형에서 서로 같은 벡터를 찾아 이용할 수 있다.

79. 공간벡터의 성분표시

(1) 단위벡터

좌표공간에서 원점O를 시점으로 하고 세 점$E_1(1, 0, 0)$, $E_2(0, 1, 0)$, $E_3(0, 0, 1)$을 각각 종점으로 하는 세 단위벡터를$\overrightarrow{OE_1}=\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OE_3}=\vec{e_3}$로 나타내고 이들을 공간의 기본벡터 또는 기본단위벡터라 한다.



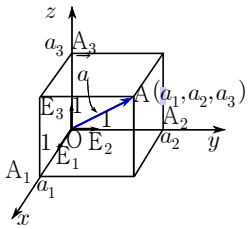
(2) 성분표시

오른쪽 그림과 같이 임의의 벡터$\vec{a}$에 대하여$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$가 되는 점A의 좌표를$A(a_1, a_2, a_3)$라고 하면

$\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OA_3}=a_3\vec{e_3}$

이므로 공간벡터$\vec{a}$는 다음과 같다.

$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$



이때, 실수a_1, a_2, a_3를 벡터$\vec{a}$의 성분이라 하고a_1을x성분,a_2를 y성분, a_3를z성분이라고 한다.

또, 벡터$\vec{a}$를 성분을 이용하여$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$로 나타내고, 이것을 공간벡터$\vec{a}$의 성분표시라고 한다.

80. 공간벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이고, k가 실수일 때

(1) $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

(3) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

(4) $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$

81. 공간벡터의 성분과 크기

두 점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B=(b_1,\ b_2,\ b_3)$에 대하여

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

82. 공간벡터의 평행

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$이고 성분이 모두0이 아닐 때

$$\vec{a}\ /\!/\ \vec{b} \iff \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

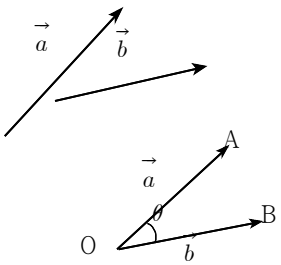
83. 내적의 뜻

(1) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

를 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$의 내적이라 한다.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$



84. 공간 벡터의 내적의 성분 표시

공간벡터의 내적

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, a_3)$일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

***입체도형에서의 벡터의 내적**

입체도형에서 두 벡터의 내적을 구할 때는 서로 같은 벡터를 찾아 시점이 같은 두 벡터의 내적으로 나타낸다.

85. 두 벡터가 이루는 각

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$가 이루는 각을 θ라 할 때,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\ \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}$$

86. 벡터의 내적과 수직·평행조건

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$일 때

(1) $\vec{a} \perp \vec{b} \longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

② $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$일 때

$\vec{a} \perp \vec{b} \longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

(2) $\vec{a} /\!/ \vec{b}$이면

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$

87. 직선의 방정식

(1) 점A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$을 지나고, 벡터$\vec{d}=(l,\ m,\ n)$에 평행인 직선의 방정식

$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$(단,$l\,m\,n\neq 0$)

(2) 두 점A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$, B$(x_2,\ y_2,\ z_2)$를 지나는 직선의 방정식

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$(단,$x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2,\ z_1\neq z_2$)

☞ 위 두 직선의 방정식에서 분모가0일 때, 분자도0인 것으로 약속한다.

88. 두 직선의 평행 조건과 수직 조건

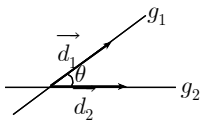
두 직선g_1 : $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$, g_2 : $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$에 대하여

(1) 평행조건 : $g_1\ /\!/\ g_2 \longleftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

(2) 수직조건 : $g_1\ \perp\ g_2 \longleftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

89. 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선g_1, g_2의 방향벡터를 각각$\vec{d_1}=(l_1,\ m_1,\ n_1)$,
$\vec{d_2}=(l_2,\ m_2,\ n_2)$이고, 두 직선$g_1$, g_2가 이루는 각이
$\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$일 때



$\cos\theta=\dfrac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{{l_1}^2+{m_1}^2+n_1^2}\ \sqrt{{l_2}^2+{m_2}^2+{n_2}^2}}$

90. 두 직선의 교점

(i) $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$x=a_1t+x_1$, $y=b_1t+y_1$, $z=c_1t+z_1$

(ii) $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}=s$ (s 는 실수)로 놓으면

$x=a_2s+x_2$, $y=b_2s+y_2$, $z=c_2s+z_2$

(iii) (i), (ii)를 연립하여 s, t 의 값을 구하고 이를 대입하여 교점의 좌표를 구한다.

91. 평면의 방정식

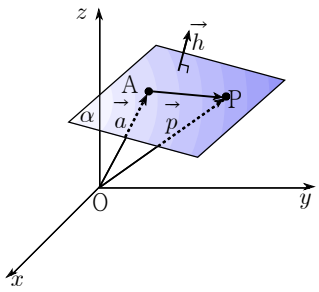
(1) 기본형 : 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 벡터 $\vec{h}=(a, b, c)$에 수직인 평면의 방정식

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

(2) 일반형 : 평면의 방정식의 일반형은

$ax+by+cz+d=0$

이고, 이 평면의 법선벡터는 $\vec{h}=(a, b, c)$이다.



[보충학습]

평면의 방정식

(1) 헤세의 표준형 : 원점에서의 거리가 p인 평면의 방정식

$lx+my+nz=p$ (단, $l^2+m^2+n^2=1,\ p>0$)

(2) 절편형 : x축 절편이 a, y축 절편이 b, z축 절편이 c인 평면의 방정식

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (단, $abc \neq 0$)

(3) 한 점 (a, b, c)를 지나고 좌표평면에 평행한 평면의 방정식

xy평면에 평행한 평면의 방정식 : $z=c$

yz평면에 평행한 평면의 방정식 : $x=a$

zx평면에 평행한 평면의 방정식 : $y=b$

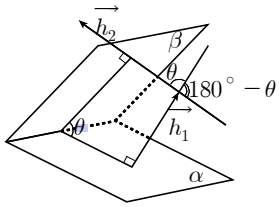
92. 두 평면의 평행과 수직

두 평면 α_1 : $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$, α_2 : $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$의 법선벡터가 각각 $\vec{h_1}=(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{h_2}=(a_2, b_2, c_2)$일 때

(1) 평행조건 : $\alpha_1 \parallel \alpha_1 \longleftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$

(2) 수직조건 : $\alpha_1 \perp \alpha_2 \longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

93. 두 평면이 이루는 각



두 평면 α_1, α_2의 법선벡터를 각각 $\vec{h_1}=(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{h_2}=(a_2, b_2, c_2)$라 하고, 두 평면 α_1, α_2가 이루는 각을 $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$라 할 때,

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2}}\ \sqrt{a_2^{\,2}+b_2^{\,2}+c_2^{\,2}}}$$

94. 점과 평면 사이의 거리

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$과 평면 α : $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리

$$h=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

95. 점과 직선 사이의 거리

점 A와 직선 $l_1 : \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ 사이의 거리

(i) 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고 $H(x_1+at,\ y_1+bt,\ z_1+ct)$로 놓는다.

(ii) 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면 $\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$임을 이용하여 t의 값을 구한다.

(iii) $|\overrightarrow{AH}|$의 값을 구한다.

96. 직선과 구와 관련된 문제

반지름의 길이가 r인 구의 중심 A에서 방향벡터가 $\vec{u}$인 직선 l에 내린 수선의 발을 P라 하면 $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0$임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

(1) 직선이 구에 접할 때 $\Rightarrow |\overrightarrow{AP}|=r$

(2) 직선과 구 사이의 최단 거리 $\Rightarrow |\overrightarrow{AP}|-r$

<참고> 직선의 방정식을 매개변수 t로 나타낸 후, x, y, z의 값을 구의 방정식에 대입하여 만든 t에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

① $D>0 \Rightarrow$ 직선과 구는 두 점에서 만난다.

② $D=0 \Rightarrow$ 직선과 구는 접한다.

③ $D<0 \Rightarrow$ 직선과 구는 만나지 않는다.

97. 평행한 두 직선 사이의 거리

점 H가 직선 $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ (단, $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$) 위의 점일 때, 점 H의 좌표는

$H(x_1+at,\ y_1+bt,\ z_1+ct)$ (t는 실수)

로 나타낼 수 있다.

직선 l과 평행한 직선 l' : $\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$ 위의 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 A와 직선 l 사이의 거리를 d라 하면

(i) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

(ii) $d=\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|$

98. 꼬인 위치에 있는 두 직선 사이의 거리

꼬인 위치에 있는 두 직선 g_1, g_2의 방향벡터가 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$일 때

(ⅰ) 직선 g_1, g_2 위의 점 P, Q의 좌표를 각각 실수 t, s로 나타낸다.

(ⅱ) $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u_1}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{u_2}$임을 이용하여 t, s의 값을 각각 구한다.

(ⅲ) 두 점 P, Q의 좌표를 구하여 $\overline{PQ}$의 길이를 구한다.

99. 두 평면의 교선의 방정식

두 평면 α : $ax+by+cz+d=0$ 과 β : $a'x+b'y+c'z+d'=0$ 의 교선의 방정식은

(i) y 를 소거하여 $x=f(z)$ 의 꼴로 정리한다.

(ii) z 를 소거하여 $x=f(y)$ 의 꼴로 정리한다.

(iii) $x=f(y)=f(z)$ 가 구하는 두 평면 α, β 의 교선의 방정식이다.

100. 직선과 평면의 교점

(i) $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}=t$ (t 는 실수)로 놓으면 $x=at+x_1$, $y=bt+y_1$, $z=ct+z_1$

(ii) (i)의 식을 주어진 평면의 방정식에 대입하여 t 의 값을 구한다.

(iii) t 의 값을 (i)에 대입하여 교점의 좌표를 구한다.

101. 평면에 대하여 대칭인 점

평면 밖의 한 점 A 와 평면 $ax+by+cz+d=0$ 에 대하여 대칭인 점을 A′ 이라고 하면

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=k(a,\ b,\ c)$ (단, $k\neq 0$인 실수)

(2) $\overline{\mathrm{AA'}}$ 의 중점이 평면 $ax+by+cz+d=0$ 에 포함된다.

102. 구와 평면 사이의 거리의 최대와 최소

좌표공간에서 평면 $ax+by+cz+d=0$ 과 구 $(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=r^2$ 이 접하면 구의 중심 $(l,\ m,\ n)$ 에서 평면 $ax+by+cz+d=0$ 까지의 거리를 d 라 할 때, 일반적으로 구와 평면 사의 거리의

(1) 최댓값은⇒ $\boldsymbol{d+r}$

(2) 최솟값은⇒ $\boldsymbol{d-r}$

103. 구와 평면이 접하는 경우

좌표공간에서 평면 $ax+by+cz+d=0$ 과 구 $(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=r^2$ 이 접하면 구의 중심 $(l,\ m,\ n)$ 에서 평면 $ax+by+cz+d=0$ 까지의 거리가 구의 반지름의 길이 r 과 같다. ➡ $\dfrac{|al+bm+cn+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=r$

104. 접평면의 방정식

(1) 좌표공간에서 구 $(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$에 접하는 평면의 방정식은 구의 중심을 $\mathrm{C}(l,\ m,\ n)$ 이라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ 를 법선벡터로 하고 점 P 를 지나는 평면의 방정식과 같다. 즉,

$$(l-x_1)(x-x_1)+(m-y_1)(y-y_1)+(n-z_1)(z-z_1)=0$$

(2) 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$에 접하는 평면의 방정식은 구의 중심을 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ 라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 를 법선벡터로 하고 점 P 를 지나는 평면의 방정식과 같다. 즉,

$$x_1x+y_1y+z_1z=r^2$$

105. 구와 평면이 원으로 만나는 경우

중심이 C 이고 반지름의 길이가 r 인 구와 평면의 교선인 원의 반지름의 길이는

$\Rightarrow \overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{r^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}$

106. 두 구의 교선인 원을 포함하는 평면의 방정식

두 구 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, $x^2+y^2+z^2+a'x+b'y+c'z+d'=0$ 의 교선인 원을 포함하는 평면의 방정식은

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')z+d-d'=0$$