석사학위논문

괴델 정리는 사용의미론의 반례인가?:

- 마이클 덤밋의 입장을 중심으로

고려대학교 대학원

철 학 과

최 승 락

2013년 6월 일

정 인 교 교수지도
석 사 학 위 논 문

괴델 정리는 사용의미론의 반례인가?:

- 마이클 덤밋의 입장을 중심으로

이 논문을 문학석사 학위논문으로 제출함.

2013년 6월 일

고려대학교 대학원
철 학 과
최 승 락

최승락의 문학석사 학위논문
심사를 완료함.

2013년 6월 일

위 원 장 정 인 교 (인)

위 원 이 초 식 (인)

위 원 이 종 권 (인)

서문

마이클 덤밋(Michael Dummett)의 1963a년도 논문인 “괴델 정리의 철학적 의의”(The Philosophical Significance of Gödel's Theorem)를 이해해 보려는 목적으로 석사 논문을 적게 되었습니다. 여전히 제대로 이해하지 못한 부분이 많고 그러다 보니 미흡한 점이 많은 글이 됐습니다. 하지만 논문 지도를 받는 동안 다른 학자들의 글을 정확하게 이해하는 것이 얼마나 중요한지 또한 저의 생각을 정확하게 표현하는 것이 얼마나 어려운지를 알게 되었습니다. 적어도 이는 매우 값진 경험이라 생각합니다.

미흡하나마 글의 형식을 갖출 수 있었던 것은 여러 교수님들의 지도와 지적 덕분이었던 것 같습니다. 논문 지도와 제 글에 대한 논평을 해 주신 정인교 교수님, 이초식 교수님, 이종권 교수님, 최원배 교수님께 감사드립니다. 그리고 이 논문에서 주장하는 것들은 『1회 서울 대학원생 철학자 대회』(1st Seoul Philosophy Graduate Student Conference) 및 교내 발표 등에서 얻은 논평들을 포함하고 있습니다. 소중한 지적과 가르침을 주신 박일호 교수님, 김동현 교수님, Michael Lynch 교수님, Takashi Yagisawa 교수님, Nikolaj Jang Lee Linding Pedersen 교수님께 감사드립니다. 수업이나 세미나를 통해 많은 가르침 주신 하종호 교수님, 성창원 교수님, 안요한 선생님, 조영아 선생님, 강수연 선생님, 태영돈 선생님, 소한종 선생님께도 감사드립니다. 아울러 한국논리학회를 통해 공부에 집중할 수 있도록 챙겨주신 송하석 교수님, 박준용 교수님, 여영서 교수님께도 감사드립니다. 마지막으로 모자란 아들 믿고 격려해 주시는 부모님께도 감사드립니다.

부족한 능력으로 말미암아 한편의 글을 쓰는데도 자주 도움을 얻고자 노력하는 편입니다. 이 석사 논문에서 다룬 주제는 부족한 부분을 더욱 보완해 박사 과정에서 그리고 그 이후에도 지속적으로 연구해 나갈 예정입니다. 잘못된 점이나 보완할 사항이 있으시면 shbs15th@hanmail.net이나 transworld@korea.ac.kr으로 메일 주시면 감사드리겠습니다.

최승락

목차

I. 들어가며

마이클 덤밋(Michael Dummett, 1925-2011)은 그의 1963년 논문인 "괴델 정리의 철학적 의의"(The Philosophical Significance of Gödel's Theorem)에서 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 입장을 소개하고 이에 대해 반박한다. 그는 괴델 정리의 결과를 "'자연수'의 의미는 어떠한 산수에 관한 직관적으로 올바른 단일한 형식체계에 의해서도 완전히 특성규정(completely characterized)되지 않는다"고 해석한다. 그리고 이러한 해석과 함께 "의미는 사용이다"라는 논제(thesis)가 세 가지 이유에서 받아들여져야 한다고 주장한다. 첫째, 그는 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정(completely characterized)되지 않는다고 해서 "의미는 사용이다"라는 논제가 옳지 않은 것은 아니라고 주장한다. 둘째로 이러한 주장 하에서 아이들에게 언어를 가르치는 것은 문장의 사용을 가르치는 것이며 마지막으로 사용으로 환원되지(reducible) 않은 의미는 의사소통 가능하지 않기 때문에 사용의미론은 받아들여져야 한다고 주장한다. 하지만 그의 이러한 대답은 석연치 않다. 왜냐하면 괴델 정리가 어떻게 사용의미론의 반례로 고려될 수 있는지에 대한 설명이 지나치게 간소하며 경우에 따라서 그의 논증은 자신의 주장을 옹호하기에 유리한 방향으로 서술되었을 수 있기 때문이다. 그러므로 이 글은 두 가지 목적을 가지고 진행된다. 먼저, 이 글의 목적은 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 아니라는 덤밋의 입장을 이해하는 것이다. 이를 위해 필자는 우선적으로 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 논증을 덤밋의 의미론적 입장에서 분석 및 이해해 볼 것이다. 그리고 덤밋이 괴델 정리가 왜 사용의미론의 반례가 아니라고 주장했는지에 대해 살펴 볼 것이다. 이 글의 두 번째 목적은 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 아니라는 덤밋의 주장이 옳은지 평가해 보는 것이다. 필자는 어떤 철학자의 주장이 잘못되었음을 비판하기 위해서는 그 학자가 지닌 모든 전제를 참이라고 받아들이는 하에서 그 전제들로 부터 모순을 이끌어 내거나 그 학자가 간과하고 있었던 바를 찾아내어 그의 주장이 받아들여지기 위해서는 더 나은 설명이 필요함을 지적하는 것이 가장 바람직하다고 생각한다. 그러므로 이 글에서 필자는 표면적으로 덤밋이 제시한 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는

논증을 개선한 후, 이 개선 논증을 덤밋은 받아들일 수밖에 없거나 최소한 그가 개선 논증에 반박하기 위해서는 추가적으로 설명을 제시해야할 것임을 주장할 것이다.

2장에서는 덤밋이 고려하는 사용의미론의 반례로서 괴델 정리를 설명할 것이다. 이 과정에서 그는 "'자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다"는 입장을 고수하는데 2차 논리를 허용하는 입장은 이를 받아들이지 않을 수 있음을 고려할 것이며 2차 논리를 허용하는 입장이 플라톤주의적 입장에 가깝다는 측면에서 덤밋이 이에 어떻게 대응할지를 고려할 것이다. 3장에서는 2장의 논의를 이어갈 것이다. 특히 4장에서 제시된 개선된 반대논증 IV.1.3을 생각하게 된 동기에 대해 예비적으로 설명하면서 덤밋에 대한 해석이 잘 못 이해될 수 있는 측면에 대해 언급할 것이다. 그리고 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 입장이 형식체계에 의해서만 그렇다는 것인지 아니면 그 이외의 방식에 의해서도 그렇다는 것인지에 대해 이해해볼 것이다. 4장에서는 개선된 반대 논증 IV.1.3을 고려함으로써 괴델 정리가 덤밋의 사용의미론에 반례가 아니라고 주장하기 위해서는 그가 설명해야할 것이 여전히 남아있음을 고려할 것이다. 5장에서는 2~4장의 내용을 정리하고 글을 마무리 할 것이다.

II. 사용의미론의 반례로서 괴델정리

1. 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 논변에 대한 덤밋의 대답

이 장에서는 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 논증을 덤밋이 어떻게 소개했고 이에 대해 어떻게 대답했는지에 대해 살펴 볼 것이다. 그리고 그 대답이 적절했는가에 대해서도 살펴 볼 것이다. 그는 다음과 같이 괴델정리가 사용의미론의 반례라는 논증을 소개한다.

> ‘괴델 정리가 산수를 포함하는 임의의 체계에 적용된다고 할 때, 이 체계에서 증명가능하지 않지만 참으로 인식되고 또 표현가능한 산술적 진술이 존재한다. 그러므로 우리는 이러한 방식으로는 ‘자연수’ 개념에 대한 완전한 특성규정을 제시할 수 없다고 해야 할 것이다.
>
> 이러한 입장을 받아들이는 이는 ‘자연수’ 표현이 표현의 의미가 사용에 의해 설명된다는 논제의 반례라는 결론을 손쉽게 이끌어 낸다.’[i]

인용문의 시작에서 덤밋은 괴델 정리가 증명한 바에 대해 설명한다. 그리고 이를 ‘우리는 이러한 방식으로는 ‘자연수’ 개념에 대한 완전한 특성규정을 제시할 수 없다고 해야 할 것이다’라고 해석한다. 괴델 정리를 이렇게 바라보는 것은 그의 의미론적 입장에 기인한 독특한 시각이라고 생각된다. 그러므로 이를 다음과 같은 명제(proposition)로 제시한다.[1]

명제 II.1.1. 산수에 관한 어떠한 직관적으로 올바른 단일한 형식체계에 의해서도 ‘자연수’의 의미는 완전히 특성규정될 수 없다.

---

1) 적어도 덤밋(1963)에서 그는 ‘'자연수' 개념의 특성규정’(characterization of the concept 'natural number')과 ‘'자연수'의 의미의 특성규정’(characterization of the meaning of 'natural number')을 혼용해서 쓰고 있다. 이 글의 주제는 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 되는가에 대한 것이므로 ‘개념’이란 용어 보다는 ‘의미’라는 용어를 사용하는 것이 혼동을 피하고 ‘개념’에 대한 불필요한 논의를 끌어들이지 않을 수 있다는데서 더욱 적합하다 생각한다. 그러므로 덤밋의 언급을 인용하거나 그 이외의 다른 이유가 없다면, ‘'자연수' 개념’(the concept 'natural number')이란 표현 보다는 ‘'자연수'의 의미’(the meaning of 'natural number')라는 표현을 사용할 것이다.

여기서 '산수에 관한 직관적으로 올바른 단일한 형식체계'라는 표현은 1963년도 논문 첫 문장에서 그가 사용한 표현으로 괴델 정리가 적용되는 형식체계를 언급한다. 편의를 위해 앞으로 우리는 이를 '형식체계 P' 혹은 'P'라고 언급할 것이다.[2] 그러므로 명제 II.1.1은 "어떠한 형식체계 P에 의해서도 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정될 수 없다"로 축약될 수 있을 것이다.

덤밋이 소개한 반대논증에 따르면 괴델 정리가 옳음을 받아들일 때, 명제 II.1.1을 괴델 정리의 한 귀결로 받아들일 수 있다. 그리고 우리가 명제 II.1.1을 받아들일 경우 '자연수'라는 표현은 사용의미론의 반례라는 귀결로 이어진다. 그러므로, '괴델 정리가 옳다'라는 전제를 참으로 받아들일 때, 그의 논증은 다음과 같은 '반대논증'(counter-argument)으로 간략하게 요약될 수 있다.

전제 II.1.2. 괴델 정리는 옳다.

반대논증 II.1.3. 사용의미론은 옳지 않다.

(1) 만약 괴델정리가 옳다면, '자연수'의 의미는 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다.

---

2) 괴델은 첫 번째 불완전성 정리를 그의 1931년도 논문인 "수학의 원리와 그와 연관된 체계들 I의 형식적으로 결정가능하지 않은 명제에 대하여"(On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related system I)의 정리 6 (theorem VI)에서 증명한다. 이 정리 6을 보이기 위해 괴델(1931, p. 171)은 정리 5 (theorem V)에서 모든 원초 회기 함수(primitive recursive function)가 형식체계 P에서 괴델수로 표현가능함(numeral-wise expressible)을 증명한다. 정리 5는 기본적으로 2차 산수체계에서 보여지는데 그렇다고 해서 이것이 모든 1차 이론들에서 보여진다는 보장은 없을 것이다. 스튜어트 샤피로(Stewart Shapiro)는 그의 1991/2022년 저작 『토대론 없는 토대』의 p. 121에서 0, 후계함수(successor function) $S(x)$, 덧셈 연산자 + 그리고 곱셈 연산자 •를 언어로 가지는 산수체계에서 정리 5가 보여지고 그러한 이유로 이 산수체계는 "불완전하다"(incomplete)고 설명한다. 반면에 곱셈 연산자 •를 언어로 포함하지 않는 산수에 관한 1차 형식체계인 프레스버거 산수(Presburger arithmetic)는 "완전하다"(complete)고 설명하며 이어 '이러한 체계는 많은 수 이론과 기초 구문론을 정식화하기에는 매우 약하다'(It is too weak to formulate much number theory and elementary syntax)고 설명한다. 샤피로의 이러한 설명을 "프레스버거 산수와 같은 체계에는 괴델 정리가 적용되지 않는다"는 주장으로 해석할 수 있음을 주장하는 것은 아니나 적어도 우리가 고려할 산수에 관한 직관적으로 올바른 단일한 형식체계는 괴델 정리가 적용되는 충분히 강한 체계여야 할 것이다. 그러므로 앞으로 '형식체계 P'라고 언급하는 것은 적어도 0, $S(x)$, + 그리고 곱셈 연산자 •를 언어로 가지는 체계를 고려할 것이다. (프레스버거산수에 대해서는 불로스, 버지스 그리고 제프리(2003)의 『계산가능성과 논리』(*Computability and Logic*) 24장을 참고하라.)

(2) 만약 '자연수'의 의미가 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다면, 사용의미론은 옳지 않다.
(3) 그러므로, 전건긍정규칙과 전제 II.1.2에 의해, 사용의미론은 옳지 않다.

위 반대논증 II.1.3의 (2)는 "만약 사용의미론이 옳다면, '자연수'의 의미는 어떤(some) 형식체계 P에 의해서 완전히 특성규정된다"의 대우(contraposition) 문장이다. 그리고 이는 덤밋이 반대논증을 극복하기 위해 부정하는 전제인 것으로 보인다. 왜냐하면 덤밋은 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는 것으로 보이며 이 경우 사용의미론이 옳고 그름은 '자연수'의 의미가 (형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정되고 되지 않고와는 무관하다고 여겨질 수 있기 때문이다.

덤밋이 '자연수'의 의미를 애초에 완전히 특성규정되지 않는 것으로 여긴다고 생각되는 이유로 두 가지 사항이 고려될 수 있다. 첫째로, 다음과 같은 언급은 덤밋이 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않음을 당연하게 여기는 모습을 보여준다.

''자연수' 표현에 익숙한 사람들은 그것의 의미를 완전히 확실하게(perfectly clear) 직관적으로 이해한다. 하지만 이 표현의 사용에 관한 우리의 어떠한 설명- 혹은 가능한 설명 -도 그 표현이 그러한 의미를 어떻게 가질 수 있는지에 대해서는 완전히 설명할 수 없다.'(ii)

'우리 모두는 '자연수' 개념을 가진다. 하지만 산술적 진술에 대한 우리의 어떠한 유한한 기술도 이 개념에 대한 우리의 소유에 대해 완전한 설명하지는 않는다. 그리고 이는 그 개념에 대한 우리의 직관적인 이해에 호소하여 우리가 항상 참인 진술을 인식할 수 있다는 사실을 보여준다. 그러한 참값이 그러한 진술들의 사용에 대한 기술로 부터 도출되지 않더라도 말이다.'(iii)

물론 제시된 인용문에서 덤밋이 '완전한 특성규정'이란 용어를 사용하지 않았다는 점이 문제가 될 수 있다. 하지만 표현의 의미에 대한 '완전한 설명'을 제시하는데 그 표현의 의미에 대한 완전한 특성규정이 요구될 수 있고 이 경우

제시된 인용문은 덤밋이 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다고 여겼을 근거로 고려될 수 있을 것이다. 그리고 둘째로, 그는 P에 의해 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는 것은 '자연수'의 의미가 본질적(inherently)으로 모호하기 때문이지 사용의미론의 기획 자체가 잘못된 것은 아니라고 주장한다. 그는 다음과 같은 설명을 통해 이러한 입장을 뒷받침한다.

'수학적 표현의 사용은 단일한 형식체계에 의해 [완전히] 특성규정될 수 있는데 이는 오직 표현의 뜻이 완전히 명확(perfectly definite)할 때이다. 자연수가 그렇듯, 표현이 선천적으로 모호한 의미를 지닐 때, 임의의 정확한 형식적 특성규정이 항상 확장됨에 따라 보편원리(general principle)를 정식화하기 위해서는 그 표현의 사용에 대한 특성규정이 필요할 것이다.'(iv)

위 인용문의 첫 문장은 어떤 표현의 의미가 완전히 특성규정될 수 있는 필요조건을 언급하고 있다. 이를 다음과 같이 재서술한다.

논제 II.1.4. 임의의 주어진 (수학적) 표현 e에 대해, 만약 e의 의미가 어떤(some) 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확(perfectly definite)하다.

논제 II.1.4를 받아들일 때, 만약 '자연수' 표현의 의미가 덤밋의 주장처럼 본질적으로 모호해서 완전히 명확하지 않다면 논제 II.1.4의 후건을 부정하는 것이 되므로 우리는 "'자연수'의 의미가 어떠한(any) 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다"를 얻을 수 있다.[3)] 보통 형식체계를 통한 '자연수'의 의미에 대한 특성규정은 유한한 공리들과 추론규칙들을 사용한다.[4)] 그러므

3) '$C_{(x,y)}$'를 'x가 y에 의해 완전히 특성규정될 수 있다'(x can be completely characterized by y)로 그리고 '$D(x)$'를 'x의 의미는 완전히 명확하다'(the meaning of x is perfectly definite)는 것으로 정의할 때, 논제 II.1.4는 '$\forall e(\exists P(C_{(e,P)}) \rightarrow D(e))$'의 형태를 의도한 문장이다. 그리고 '$n$'을 '자연수'라고 할 때, '자연수' 표현이 본질적으로 모호해 완전히 명확하지 않다면 $\neg D(n)$이 되고 후건부정에 의해 $\neg\exists P(C_{(n,P)})$를 얻으므로 우리는 $\forall P\neg(C_{(n,P)})$를 얻을 수 있다.

4) 물론 모든 '형식체계'라 불리는 체계들이 유한한 공리와 추론 규칙 만을 사용해야 하는 것은 아니다. 일반적으로 '형식체계'라는 것은 그것이 지닌 공리들의 집합이 결정가능(decidable)한 것(혹은 (원초) 회기적인 것)을 일컫는다.

로 덤밋의 입장은 '자연수'의 의미를 유한번의 언어적 기술(linguistic description)을 통해 완전히 특성규정하는 것은 애초에 불가능하다는 것으로 해석될 수 있다.[5] 말하자면, 사용의미론이 옳더라도 '자연수'의 의미는 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정될 수 없으므로 반대논증의 전제 (2)는 옳지 않다는 것이다. 덤밋이 전제 (2)를 어떠한 방식으로 부정하는 것인지에 대해 조금 더 자세히 알아보자. 필자의 해석이 옳다면 덤밋의 입장은 다음과 같다.

"'자연수'의 의미는 애초에 (형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정되지 않는 것이기 때문에 그러한 완전한 특성규정이 제시되고 되지 않고는 사용의미론의 옳고 그름과는 무관하다."

앞서 언급했듯이 전제 (2)는 (가)'만약 사용의미론이 옳다면, '자연수'의 의미는 어떤(some) 형식체계 P에 의해서 완전히 특성규정된다'의 대우 문장이다. 이 문장의 후건은 명제 II.1.1에 의해 부정된다. 그러므로 우리는 후건부정에 의해 "사용의미론이 옳지 않다"는 결론을 얻는다. 하지만 덤밋은 1963a년도 논문에서 다음과 같이 사용의미론이 고수되어야 하는 두 가지 이유를 설명한다.

'아이들에게 언어를 가르치는 것은 부호를 가르치는 것과 같지 않다. ... 우리가 할 수 있는 것은 단어를 포함한 문장을 사용하는 것이고 이러한 [문장의] 사용을 아이들이 따라할 수 있도록 훈련시키는 것 뿐이다.'[v]

'내가 단어에 부여한 사용으로 환원될 수 없는 의미는 나만이 인식할 수 있는 것이다. 그러므로 나는 상대방이 그것을 인식했는지 알 수 없고 상대방이 그것을 어떻게 인식했는지 알 수 없다.'[vi]

---

5) 물론, 이러한 해석은 덤밋의 입장을 확대해석한 것이라고 여겨질 수 있다. 덤밋이 주장하는 것은 형식체계 P에 의해 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다는 것이지 형식체계가 아닌 다른 방식에 의해 완전히 특성규정되지 않는다고는 주장하지 않았다고 할 수 있다. 이 문제는 두 가지 방향에서 접근해야 할 것이다. 첫째로, 덤밋은 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정될 수 있다고 보았나? 그리고 둘째로, 특성규정될 수 있다면 그것은 어떠한 방식인가? 이와 관련된 주제는 3장에서 다뤄질 것이다.

첫 번째 인용문은 언어를 이해하는 것은 문장의 사용을 이해하는 것임을 설명한다. 그리고 두 번째 인용문은 의미라는 것은 항상 개개인간에 의사소통 가능해야 함을 설명한다. 즉, 덤밋은 언어를 이해하는 것은 문장의 사용을 이해하는 것일 뿐만 아니라 사용으로 환원되지 않는 의미는 의사소통 가능하지 않기 때문에 사용의미론이 받아들여져야 한다고 설명하는 것이다.[6] 이러한 덤밋의 설명이 옳다면 사용의미론은 옳다. 하지만 앞서 우리는 명제 II.1.1과 (가)에 의해 "사용의미론이 옳지 않다"는 결론을 얻었었다. 이는 모순이다. 덤밋은 "사용의미론이 옳다"는 입장과 명제 II.1.1을 받아들이기에 (가)와 이것의 대우 문장인 반대논증 II.1.3의 전제 (2)를 받아들이지 않는 것으로 보인다. 하지만 다음과 같은 전제 (나)를 받아들이는 경우를 고려해 보자.

(나) 임의의 주어진 의미론 T에 대해, 만약 T가 옳다면, '자연수'의 의미를 완전히 특성규정하는 T에서 수용가능한 특성규정 방식이 존재한다.

제시된 (나)의 변항 T에 '사용의미론'을 적용할 경우, 우리는 "사용의미론이 옳다면, '자연수'의 의미를 특성규정하는 T에서 수용가능한 특성규정 방식이 존재한다"를 얻을 수 있다. 이 경우 덤밋은 명제 II.1.1을 고려해 '자연수'의 의미는 애초에 완전히 특성규정되지 않고 그렇기에 '자연수'의 의미를 완전히 특성규정하는 방식이 어떤 의미론이던 존재하지 않는다고 주장할 수 있다. 다시 말해, "'자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다"는 주장을 받아들임으로써 (나)를 받아들이지 않는 것이다. 하지만 '자연수'의 의미는 정말로 완전히 특성규정되지 않는가? 만약 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정될 경우, "'자연수'의 의미는 애초에 완전히 특성규정되지 않는다"는 덤밋의 주장은 부정된다. 이 경우, (나)를 받아들일 수 있는 여지가 생긴다. 또한 (나)를 받아들일 경우 반대논증 II.1.3의 전제 (2)를 받아들일 여지가 생긴다고도 볼 수 있을 것이다. 그러므로 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다면 덤밋이 전제 (2)를 받아들이지 않는 근거가 약해질 수 있으며 반대논증 II.1.3을 극복

6) 이 두 가지 논제는 덤밋의 의미론이 지니는 주요한 두 가지 논제로 3절에서 다시 한번 논제 II.3.2과 II.3.4으로 소개될 것이다.

하지 못했다고 볼 수 있는 상황에 놓일 수 있다. 다음 절에서는 이러한 물음에 대해 살펴보고 이어지는 3절에서는 이에 대한 덤밋의 예상되는 대답을 고려해 보자.

2. 가능한 반박

2차 논리를 지지하는 이들은 2차 논리를 받아들일 경우 귀납공리를 포함한 형식체계 P의 범주성(categoricity)이 증명됨으로써 유일한 자연수 집합을 형식체계 P의 표준모형으로 얻을 수 있고 그렇기에 "'자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다"고 주장할 수 있다. 즉, '자연수'의 의미가 완전히 특성규정됨을 주장함으로써 "'자연수'의 의미는 애초에 유한한 언어적 기술을 통해 완전히 특성규정될 수 없다"는 덤밋의 주장을 부정하고 덤밋이 반대논증의 전제 (2)가 옳지 않음을 입증한 것은 아니며 그렇기에 반대논증은 여전히 유효하다고 주장하는 것이다.[7] 2차 논리의 옹호자들이 산수 체계의 표준모형을 얻는 방식은 그 체계로 부터 도출되는 진술들을 참으로 만족시키는 구조(structure) 혹은 해석(interpretation)을 제시하는 방식으로 가까운 기원을 따지자면 리차드 데데킨트(Richard Dedekind)의 업적으로 부터 발전된 것이라 할 수 있다. 또한 데데킨트의 업적으로 부터 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다는 입장이 해석될 여지 역시 존재한다. 그러므로 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다는 주장이 데데킨트의 입장으로 부터 어떻게 제시될 수 있는지에 대해 살펴보자.

옥스퍼드 영어사전은 '특성규정하다'의 일상적인 의미를 '두드러지는 본성이나 특징을 기술하다'[vii]로 정의한다. 그러므로 "'자연수'의 의미에 관해 특성규정을 한다"는 것은 '자연수'의 의미가 지닌 본성이나 특징을 기술하는 것으로 이해될 수 있다. 수학자들이 수학적 대상이 지닌 본성이나 특징을 기술할 때, 가장 체계적이라고 여기는 방식은 공리적인 방식(axiomatic method)이다. 하워드 이브스(Harward Eves, 1990, pp. 15-16)에 따르면 이러한 공

7) 물론 반대논증이 여전히 유효함을 주장하기 위해서는 (나)가 옳음 주장임이 전제된다. 여기서 '반대논증이 여전히 유효하다'고 말한 것은 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정될 경우 덤밋은 반대논증을 극복하기 위해 추가적인 설명을 제시해야 할 것이란 측면에서 그렇다는 것이다.

리적인 방식은 그리스 수학으로 부터 전해져온 것이다.[8] 이브스는 그리스인들의 공리적 방식의 기원이 그들의 고유 용어인 논리적인 '논술'(discourse)에 있었다고 설명한다. 그리고 여기서 '논술'이란 최초에 받아들이기로 가정한 초기 진술들의 집합으로 부터 연역적 추론으로 얻은 진술들의 나열이다.[9)(viii)]

'자연수'의 의미를 공리적 방식으로 특성규정했던 시도 중, 가장 잘 알려진 것은 주세페 페아노(Giuseppe Peano)가 그의 1889년도 논문에서 제시한 것으로 '페아노 산수'(Peano Arithmetic)라 불리는 것이다. 페아노 산수는 '자연수'의 의미를 공리적으로 특성규정하는 한 예라고 볼 수 있을 것이다. 그렇다면 페아노 산수는 '자연수'의 의미를 *완전히* 특성규정한다고 바라 볼 수 있나? 이러한 물음의 대답은 페아노 산수의 공리를 제시함으로 해서 데데킨트가 보이려고 했던 바가 무엇인지를 살펴봄으로써 도움을 얻을 수 있을 것이다.

---

8) 물론 공리적 방식이 피타고라스 학파에 의해 본격적으로 발전되었던 것인가에 대한 문제는 논란의 여지가 있다고 한다. 하지만 아리스토텔레스(Aristotle)의 『분석론 후서』(Analytica posteriora)가 공리적 방식으로 고전논리를 체계화하고 있음은 논란의 여지가 없다는 점은 그도 동의한다. 또한 이브스가 말하듯 유클리드(Euclid)가 『원론』(Elements)에서 공리적 방법을 비길 데 없이 획기적으로 적용했다는 사실을 볼 때, 그리스 수학으로 부터 공리적 방식이 발전했음은 논란의 여지가 없어 보인다.

9) 이브스는 이러한 실질적 공리학의 양식(the pattern of material axiomatics)을 다음과 같이 요약한다.

'1. 논술의 기초적이고 전문적인 용어들에 대한 초기 설명이 주어진다. 이는 독자에게 기초적인 용어가 뜻하는 바를 알려주기 위함이다.
2. 주요 진술들이 나열된다. 이런 진술들은 기초적인 용어에 관한 것이며 초기 설명에 의해 주어진 속성들에 근거해 참으로 받아들일 것으로 보인다. 이러한 주요 진술들을 그 논술의 '공리들'(axioms) 혹은 '공준들'(postulate)이라 부른다.
3. 그 논술의 다른 모든 전문적인 용어들은 이전에 도입된 용어들에 의해 정의된다.
4. 그 논술의 다른 모든 진술들은 이전에 받아들였거나 증명된 진술들로 부터 논리적으로 연역된다. 이러한 도출된 진술들은 그 논술의 '정리들'(theorems)이라 부른다.'

이브스의 설명이 옳다면 유클리드가 『원론』에서 공간의 수학적 본성을 특성규정한 것은 공리적 방식의 대표적인 예라고 할 수 있을 것이다. 주의 할 것은 이브스는 형식적인 공리학과 실질적 공리학을 구별한다는 것이다. 말하자면, 그에게 '공리체계'와 '형식체계'는 같은 의미가 아닌 것으로 보인다.

폰 노이만(John Von Neuman)도 증명에 관한 힐베르트 이론(Hilbert's theory of proof)을 소개하며 '공리'에 대해 규정한 바 있다. 이에 대해서는 그의 1931년도 논문 "형식주의 수학의 기초"(The formalist foundations of mathematics)를 참고하라.

페아노는 페아노 산수의 공리들을 데데킨트의 1888년 저작인 『수들은 무엇이고 이들은 무엇이 되어야 하는?』(*What Are Numbers and What Should They Be?*)로 부터 빌렸다고 말한다. 데데킨트의 이 저작은 페아노 산수(혹은 산수 체계)의 범주성을 증명한 최초의 저작이기도 하다. 그리고 데데킨트가 그러한 공리를 어떻게 끌어냈고 어떠한 목적으로 제시했는지에 대한 자료인 "데데킨트의 편지"는 하오 왕(Hao Wang)의 1957년도 논문 "산수의 공리화"(The Axiomatization of Arithmetic)에 공개된 바 있다. 편지의 시작에서 데데킨트는 다음과 같이 그의 작업을 통해 보이려고 했던 바에 대해 설명한다.

'제가 글을 쓰게 된 유래에 대해 말씀드리고 싶습니다. 제 글은 어떻게 쓰였을까요? 하루만에는 아니었고, 오랜 작업들이 모인 결과였습니다. 자연수들의 나열을 분석함으로써 이러한 결과를 얻었습니다. 말하자면, 이는 실제로 자연수의 나열 그 자체가 마음에 제시된 것이라 하겠습니다. 이러한 나열 N의 상호 독립적이고 근본적인 속성들은 무엇일까요? 다시 말해, (다) <u>다른 것으로 부터 연역되지 않으면서 다른 모든 것이 따라 나오는 그러한 속성들이 무엇일까요?</u>'(ix)

편지의 시작에서 데데킨트는 '자연수들의 나열이 지닌 상호 독립적이고 근본적인 속성들을 찾기 위함'이 그의 목적이라고 설명한다. 그리고 (다)에서 이를 '다른 것으로 부터 연역되지 않으면서 다른 모든 것이 따라 나오는 그러한 속성들'을 찾는 것이라고 부연 설명한다. 그리고 편지에서는 그러한 속성을 다섯 가지로 나눠 설명하는데 그는 이러한 다섯 가지 속성을 다음과 같이 설명한다.

'문제를 이러한 방향에서 고려할 때, 다음과 같은 사실들을 받아들여야 할 것입니다.
(1) 수들의 나열인 N은 숫자라고 불리는 개별자들의 혹은 원소들의 *체계*[10]입니다.
(2) 체계 N의 원소들은 다른 원소들과 일정한 관계상에 놓여있습니다. 먼저, 각각의 한정된 수 n은 그것의 뒤를 잇는 혹은 n 다음의 수인 한정된 수 n'에 속합니다. 그리고 이러한 사실에 의해 원소들은 일정한 순서상에 있도록 결정됩니다. 이는 체계에 대한 사상(mapping) φ의 보편적 개념(general concept)을 고려하게 합니다. (∮2). 각각

10) 데데킨트는 '집합(set)이란 용어 대신 '체계'(system)는를 사용했다.

의 수 n의 상(image) $\varphi(n)$은 또 다시 수 n'이고 그러므로 $\varphi(N)$은 N의 부분입니다. 여기서 우리는 체계 N으로 부터 그 자신으로의 사상 φ를 고려하게 됩니다. 그리고 그럼으로써 이는 완전히 보편적인 것으로 받아들여져야 합니다.(∮4)

(3) 주어진 서로 다른 수 a와 b에 대해, 이들의 다음 수 a'과 b' 역시도 구별됩니다. 그러므로 사상 φ는 유사점의 구별이란 특징을 지니게 됩니다.(∮3).

(4) 모든 수가 다음 수 n'인 것은 아닙니다. 말하자면, $\varphi(N)$은 N의 적절한 부분입니다. 이는 앞 단락과 함께 수들의 나열 N이 무한함을 나타냅니다.(∮5).

(5) 더 자세히 말해, 1은 $\varphi(N)$에 놓여있지 않은 *유일한* 수입니다. 그러므로 (라) 우리는 이러한 사실들을 순전히 순서대로 무한히 나열된 체계 N의 완전한 특성규정으로 고려해 기입할 것입니다.'(필자의 강조)(x)

자연수의 시작을 0으로 바라보자면, (1)에서 (5)의 과정은 어떠한 수이든 그 수의 다음 수는 0이 아님을 표현하는 페아노 산수의 공리 $\forall x(s(x)\neq 0)$와 "만약 임의의 수 x와 y에 대해 이들의 다음 수가 같다면 이들은 같은 수이다"를 표현하는 공리 $\forall x \forall y(s(x)=s(y)\rightarrow x=y)$를 묘사한다. 실제로 그의 책 6장에서 그는 자연수 집합(체계)을 정의하며 언급된 두 공리를 이용해 수학적 귀납법(mathematical induction)의 기본 원리를 정의한다. 그리고 7장에서 셀 수 있는 집합(countable set)을 도입하고 8장에서는 자연수에 관한 모든 한정되지 않은 집합은 무한함을 증명한다. 9장에서는 귀납에 대한 정의(회기적 정의)가 제시되며 11장부터 13장에 이르러 덧셈과 곱셈 그리고 지수가 회기적으로 정의된다. 그리고 이로 부터 남은 페아노 공리인 $\forall x(x+0=x)$, $\forall x \forall y(x+s(y)=s(x+y))$, $\forall x(x \cdot 0=0)$ 그리고 $\forall x \forall y(x \cdot s(y)=x \cdot y+x)$가 얻어진다.

흥미로운 점은 (라)에서 언급되듯이 데데킨트가 이러한 원리(사실)들을 "자연수 집합(체계) N의 완전한 특성규정"으로 고려하는 부분이다. (다)에서 언급하듯이 그의 목적은 "자연수들의 나열이 지닌 상호 독립적이고 근본적인 속성들을 찾기 위함"이었다. 그리고 이는 "다른 것으로 부터 연역되지 않으면서 다른 모든 것이 따라 나오는 그러한 속성들"을 찾기 위함이라고 했다. 다시 말해, 그는 이러한 원리들을 찾아 이들을 공리로 채택할 경우 이 공리들로 부터 모든 산술적 참을 이끌어낼 수 있다고 믿은 듯하다. 이러한 해석은

데데킨트의 작업에 대한 하오 왕(1957, p.153)의 평가를 통해서도 생각할 수 있다.

'... 데데킨트가 자연수의 나열을 분석함으로써 모든 페아노 공리들을 얻었다는 것은 괄목할만하다. (마) 더욱 놀라운 것은 그가 그의 분석을 완성했을 때, 자연수들에 관한 속성들과 정리들이 그의 특성규정으로 부터 모두 도출될 수 있다고 믿었다는 것이다. 이러한 믿음은 이후의 발전들에 의해 대부분 확인되어 왔다. 확실히 데데킨트는 이외의 다른 특성규정들이 필요 없다는 것을 보기 위해 자연수에 대한 많은 정리와 증명들을 찾지는 않았다. 대신, 그는 자연수의 나열이 그의 공리들에 의해 완전히 결정된다는 것에 대한 그 자신의 만족을 검증했다. 그리고 공리들은 정리들의 도출에 적합하다고 결론지었다. 불가사의한 것은 그가 어떻게 그러한 검증을 제시했느냐다.'(필자의 강조)(xi)

(마)에서 하오 왕도 언급하듯이 데데킨트는 아마도 페아노 산수의 공리들로 부터 모든 보편양화된 참인 산술적 진술들이 도출될 것이라고 여긴 듯하다. 그렇다면 하오 왕이 묻듯이 데데킨트는 그의 믿음을 어떻게 검증했을까? 앞서 소개한 데데킨트의 편지에서 그는 자연수가 지닌 5가지 속성을 소개하고 여섯 번째로 그가 직면한 문제에 대해 다음과 같이 언급한다.

'(6) 하지만 저는 제 대답에서 이러한 사실들이 자연수-나열의 본성에 대한 완전한 특성규정에 여전히 적절하지 않음을 보여왔습니다. 실제로, 모든 이러한 사실들은 자연수-나열 N 뿐만 아니라 임의의 자연수가 아닌 원소들 t에 대한 체계 T를 포함하는 모든 체계 S에도 적용됩니다. ... 우리의 체계 S로부터 모든 질서의 자취를 방해하는 이질적인 침입자 t를 세척하기 위해서 그리고 우리 자신을 체계 N으로 한정하기 위해서 우리는 무엇을 해야 할까요?'(xii)

데데킨트가 제시한 물음은 페아노 산수의 범주성이 증명될 수 있는가에 대한 것이었고 그는 이 물음에 대답하기 위해 그의 저작 10장에서 페아노 산수의 범주성을 증명하기에 이른다. 실제로 1888년 저작에서 데데킨트가 '자연수'의 의미로 특성규정한 것은 페아노 공리를 제시하고 이 공리들을 참으로 만족시키는 대상들의 집합인 유일한 자연수의 집합을 규정한 것이었다. 그는 페아노

산수의 공리들로 부터 모든 참인 산수의 정리들이 도출된다고 믿었던 것 같고 이 정리들을 참이게 만족시킬 집합에는 수 이외의 원소들은 포함되어서는 안 된다고 생각했다. 그래서 그는 페아노 산수의 공리들과 그것으로 부터 도출된 진술들을 참이게 만족시키는 임의의 두 무한집합 N과 M이 동형(isomorphic)임을 보임으로써 그러한 유일한 집합이 있음을 증명한 것이다. 그리고 우리는 이를 '페아노 산수의 범주성 증명'[11]이라 부른다.

만약 2차 논리의 옹호자들이 2차 논리에서는 페아노 산수의 범주성이 주어지기 때문이 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다고 여긴다면 이들은 데데킨트와 같은 믿음을 지녀야 한다. 즉, 페아노 산수의 공리로 부터 모든 참인 산수의 정리들이 도출될 수 있다는 믿음 말이다. 하지만 이러한 믿음은 최소한 단일한 형식체계 P에 의해서 성취될 수 없고 그 이외의 방식을 고려하더라도 그것이 어떻게 주어질 수 있는지에 대한 물음이 제기될 수 있다. 이러한 입장에 대해 예상되는 덤밋의 대응은 세 가지 방향에서 이루어질 수 있다. 첫째, 2차 논리의 옹호자들이 플라톤주의자(platonist)들이 그러하듯 범주성 증명이 보여주는 것은 유일한 자연수 집합이 구조로써 존재함을 보이는 증거라고 주장할 경우이다. 그들은 이러한 구조의 존재를 통해 우리는 자연수를 이해할 수 있고 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정된다고 여길 수 있다. 이때, 만약 2차 논리의 옹호자들이 이러한 구조가 추상적으로 존재한다고 주장한다면, 이에 대한 예상가능한 덤밋의 대응은 그러한 구조가 추상적 대상이라면 추상적 대상이 어떻게 설명적 힘(explanatory power)을 지닐 수 있냐고 묻는 것이다.[12] 또한 그는 자연수나 자연수의 구조가 우리에게 어떻게 주어지는지에 대해 설명이 요구된다고 비판할 것이다. 3절(1)에서는 이에 대해 살펴 볼 것이다. 둘째, 덤밋은 2차 논리의 사용을 비판할 것이다. 왜냐하면 2차 논리가 완전히 형식화되지 않음은 2차 논리를 주장하는 사람들도 인정할 것이기 때문

11) 보다 현대적인 방식의 증명은 스튜어트 샤피로(Stewart Shapiro)의 1991/2002년 저작 『토대론 없는 토대』(Foundation without Foundationalism)의 4장을 참고하라.

12) 여기서 언급한 덤밋의 대응은 추상적 대상이 존재함을 인정하는 플라톤주의에 대한 것이다. "만약 (페아노) 산수체계에 대한 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 특성규정될 수 있다면, '자연수'의 의미는 (단일한 형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정된다"를 그가 받아들이는 가는 논제 II.3.5에서 다시 한번 살펴 볼 것이다. 추상적 대상에 대한 덤밋의 대응은 그의 1967년 저작 "플라톤주의"(Platonism)를 참고하라.

이다. 마지막으로 덤밋은 2차 논리의 옹호자들이 고려하는 유일한 자연수 모형은 우리가 그러한 모형에 대해 전혀 기술하지 못한다는 측면에서 우리가 전혀 발현(manifest)하지 못하는 '자연수'의 의미에 대한 측면이 설명된 것처럼 가정하는 문제가 있다고 주장할 것이다. 3절(2)에서는 이에 대해 살펴 볼 것이다.

3. 덤밋의 대응

논의를 진행하기에 앞서 덤밋이 사용하는 용어인 '실재론'(realism)에 대해 알아 볼 필요가 있다. 왜냐하면 덤밋의 '실재론'은 '플라톤주의'(platonism)가 의미하는 바와 다소 차이가 나기 때문이다.

일반적으로 '실재론'이란 표현은 '플라톤주의'라는 표현과 크게 다르지 않아 보일 것이다. 하지만 덤밋의 입장을 이해하는데 있어서 이는 구별될 필요가 있다. 왜냐하면 덤밋이 고려하는 실재론과 반실재론간의 구분이 "어떠한 대상이 존재하느냐?"에 대한 대답에 집중하기보다 "어떤 대상을 기술하는 진술의 진리값을 판단하는 방법이 우리에게 알려질 수 있느냐?"에 초점을 두기 때문이다. 덤밋은 '실재론'을 다음과 같이 특성규정한다.

'크라이슬이 논해왔듯이, 플라톤주의와 관련된 논의는 수학적 대상이 존재하느냐에 대한 것이기 보다 수학적 진술의 객관성에 대한 것과 관련이 있다.

이러한 이유에서, 실재론과 반실재론간의 논의에 있어 내가 선호하는 특성규정은 존재들의 집합이나 항들의 집합과 관련된 것이 아니라 진술들의 집합에 관한 것이다. ... (바) 내가 특성규정하는 실재론은 논의된 집합의 진술들이 그것을 알기 위한 우리의 방법에 독립적으로 객관적인 진리값을 가진다는 믿음이다. 그러므로 이러한 진술들이 참 혹은 거짓임은 우리와 독립적으로 존재하는 실재에 의해 결정된다.'(필자의 강조)(xiii)

덤밋의 '실재론'에 대한 이러한 특성규정은 언듯 고전적인 의미에서의 '실재론' 혹은 '플라톤주의'와 큰 차이가 없어 보이기도 한다. 하지만 어떠한 입장이 플라톤주의이냐 아니냐에 대한 것이 그들이 주장하는 (추상적)대상의 존재성에만 의존하는 것이라면 플라톤주의자이면서 반실재론자인 경우가 가능하다. 왜

냐하면 (바)에서도 볼 수 있듯이 덤밋은 실재론이냐 아니냐를 “진술의 진리값을 결정하는 절차(means)가 우리에게 알려질 수 있는가?”에 기준해서 판단하기 때문이다. 예를 들어, 어떤 사람이 자연수의 구조가 추상적으로 존재하며 이것이 자연수에 관한 진술을 참이게 하는 절차 혹은 설명적 요구를 충족시킬 수 있다고 주장하고 그러한 설명을 제시한다면 이 사람은 수학적 대상에 대한 플라톤주의자이면서 실재론자가 아닐 수 있을 것이다. 이러한 실재론에 대한 덤밋의 특성규정은 다소 논란의 여지를 남긴다.[13] 그러므로 앞으로 덤밋이 규정한 실재론을 ‘의미론적 실재론’(semantic realism)으로 고려할 것이며 특별한 이유가 없다면 ‘실재론’을 덤밋의 의미론적 실재론을 언급하는 것으로 사용할 것이다. 왜냐하면 어떤 (추상적인) 대상이 존재하느냐에 초점을 둔 입장은 ‘실재론’ 개념 대신 ‘플라톤주의’ 개념을 통해 언급하더라도 큰 문제가 없을 것이라 생각되기 때문이다. 덤밋의 ‘의미론적 실재론’을 그가 특성규정한 바에 따라 다음과 같은 논제로 제시한다.

논제 II.3.1 임의의 주어진 진술 φ에 대해, S는 ‘의미론적 실재론자’다. iff S는 φ가 객관적인(objective) 진리값을 지니고 있고 그것의 진리값을 얻기 위한 방법(means)이 우리의 인지 영역에 독립적인 것이라고 믿는다.

1) 플라톤주의에 대한 덤밋의 대응

이제 2절 마지막에서 언급한 덤밋의 첫 번째 대응부터 살펴보자. 플라톤주의자는 수학적 대상 및 구조가 추상적으로 존재해서 이들을 통해 우리는 ‘자연수’의 의미를 이해할 수 있고 그러므로 ‘자연수’의 의미에 관한 완전한 특성규정 역시 얻을 수 있을 것이라 주장할 수 있다.[14] 다시 말해, 이는 플라톤

13) 대표적인 예로 데빗(Michael Devitt, 1984)을 참고하라.

14) 플라톤주의를 따를 경우, 2차 논리와 2가 원리(bivalence), 비구성적 증명(non-constructive proof) 그리고 비서술적 정의를 수용할 수 있을 것이다. 하지만 어떤 사람이 2차 논리, 2가 원리, 비구성적 증명 그리고 비서술적 정의를 수용한다고 해서 그가 플라톤주의자인 것은 아니다. 이러한 태도를 지니는 것이 가능한가에 대한 논란의 여지는 있을 것이나 스튜어트 샤피로(Stewart Shapiro)는 1997년 저작 『수리철학: 구조와 존재론』(*Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, p.37-44)에서 그러한 입장이 가능하다고 주장한다. 그는 “수학은 플라톤주의가 참인 것처럼 사용(practice)되어야 한다”는 입장을 지니나 플라톤주의는 아니라는 (강한) ‘활동하는 실재론’(working realism)의 입장을

주의자들이 두 가지를 주장하는 것으로 하나는 수학적 구조가 추상적으로 존재함을 주장하는 것이고 다른 하나는 "유일한 자연수 집합으로써의 구조가 추상적으로 존재한다면 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정된다"를 주장하는 것이다. 이러한 입장에 대해 덤밋이 취할 수 있는 대응은 수학적 구조가 추상적으로 존재함을 받아들이더라도 그것이 설명적 힘을 지닐 수 없기 때문에 "유일한 자연수 집합으로써의 구조가 추상적으로 존재한다면 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정된다"는 전제를 받아들일 수 없다고 말하는 것이다. 만약 이러한 덤밋의 비판이 옳다면 수학적 구조가 추상적으로 존재하더라도 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정된다고 할 수 없을 것이다.

덤밋은 그의 1967년 저작 "플라톤주의"(Platonism)에서 플라톤주의적 사고는 수학적 참에 대한 이해를 물리적 대상에 대한 지각(perception)과 비교하고 수학적 실체를 물리적 세계에 비교하는 직유법(simile)에 근간한다고 주장한다. 다시 말해, 플라톤주의는 수학적 대상이 추상적 대상으로서 존재한다고 여기는데 추상적 대상을 물리적 대상과 같은 특징을 지니는 것으로 고려하는 것이 문제라는 것이다. 덤밋(1967, pp. 202-203)은 이러한 생각이 두 가지 이유에서 잘못됐다고 생각한다.

첫째, 덤밋은 물리적 대상은 물리 세계에 대해 인과적인 영향력(effect)을 지니고 관찰이 가능하며 그렇기에 설명적 힘(explanatory power)을 지니나 추상적인 대상은 그렇지 않다고 주장한다. 예를 들어, 2008년 9월 10일 스위스 제네바의 유럽입자물리학연구소(CERN: Conseil Europeen pour la Recherche Nucleaire)는 우주 빅뱅을 재현하는 실험을 실시했다. 이 실험의 최대 관심은 우주 빅뱅이 재현되는 과정에서 이론상으로만 존재하던 '힉스 보존'(Higgs Boson)이라는 가상 입자가 실제로 존재하는가에 있었다. 왜냐하면 물리학자들은 힉스 입자의 존재 여부가 기본 입자들이 어떻게 질량을 얻는지에 대한 설명을 제공함으로써 물리학의 오랜 숙원이던 질량에 대한 이론이 완성될 수 있다고 믿었기 때문이다. 다시 말해, 힉스 입자의 존재 여부는 물리 세계에 영향력을 지니며 관찰가능하다. 그리고 그렇기에 '질량'에 대해 설명을 제시할 설명적 힘을 지닌다. 하지만 추상적 대상은 물리 세계에 (인과적) 영향력을 지니지도 않으며 관찰 및 측정 가능하지도 않다. 그렇기에 설명적 힘을 지닌다고 말하기가 어렵다는 것이다.

둘째로, 덤밋은 물리적 대상이 설명적 힘을 가지는 것은 그것이 관찰가능하며 관찰된 결과들이 연구자가 지닌 지식과 관심 및 기대 그리고 연구자

제시한 바 있다.

가 지닌 가정에 의해 해석될 수 있는 해석적 요소(interpretative element)를 지닌다고 말한다. 다시 말해, 덤밋은 물리적 대상에 대한 연구자의 해석(주장)은 관찰된 바에 대한 연구자의 지식에 의존한 것이나 추상적 대상에 대한 주장은 관찰된 바가 아닌 연역에 의한 결과물이라고 말한다.[15)]

그렇다면 수학적 대상에 대한 무수한 주장들은 어떻게 설명적 힘을 지닐까? 우리가 앞서 상정했던 2차 논리의 옹호자들의 입장을 상기해 보자. 이들은 페아노 산수 체계의 범주성이 주어졌음은 모든 참인 산술적 진술들을 만족시킬 자연수 집합이 구조(structure)로써 추상적으로 존재함을 보이는 증거라고 주장할 수 있다. 그리고 이러한 자연수에 대한 구조가 추상적 존재자로서 존재하기 때문에 우리는 '자연수'의 의미를 이해할 수 있고 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정된다고 여길 수 있다. 이에 대해 예상가능한 덤밋의 비판은 추상적 존재자들이 어떻게 설명적 힘을 지닐 수 있냐는 것이다. 다시 말해, 수학적 대상이나 구조가 추상적으로 존재함을 가정하더라도 그것들이 설명적 힘을 지니는 것은 아니므로 "유일한 자연수 집합으로써의 구조가 추상적으로 존재한다면 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정된다"는 가정을 받아들일 수 없다는 것이다. 또한 이 경우, "'자연수'의 의미는 완전히 특성규정된다"는 입장 역시 받아들여질 수 없을 것이다. 그렇다면 덤밋은 수학적 대상들이 추상적인 존재자가 아닐 때, 그것들이 어떻게 설명적 힘을 지닌다고 생각할까? 2절의 마지막에서 언급한 덤밋의 예상되는 두 번째와 세 번째 주장을 살펴보기에 앞서 이에 대해 알아보자.

수학적 구조가 추상적으로 존재한다는 입장에 대한 다음과 같은 덤밋(1991a, p. 53)의 대응으로 부터 이에 대한 대답을 살펴 볼 수 있을 것 같다.

'만약 우리가 수학자들이 말하는 바에 대해서 관심이 있다면, 우리는 수학적 구조들에

---

15) 수학을 경험적인 것(empirical in character)으로 바라보는 밀(John Stuart Mill)과 같은 입장을 지지하는 사람들은 여기에 대해 동의하지 않을 수 있다. 덤밋(1991c, pp. 430-431)은 이에 대해 밀이 보인 것은 수학이 경험적 세계에 잘 적용됨을 보인 것이지 그 자체로 경험적 과학임을 보인 것은 아니라고 비판할 것이다.(Ibid., p. 430:10) 그리고 수학적 표현(mathematical notion)은 물리적 실재(physical reality)에 뿐만 아니라 비물리적 상황(non-physical situation)에도 적용된다고 비판할 것이다.(Ibid., p. 430: below 19)

그리고 추가적으로 덤밋(1967, p. 203)은 컴퓨터 계산(computation)을 관찰의 결과물과 동일시하는 입장에 대해서도 대답한다. 컴퓨터 계산 과정과 관찰이 동일한 것으로 유비된다면 '계산에 의해 검증가능한 진리의 상태에 대한 설명이 필요 없을 것'(We do not need an explanation of the status of truths verifiable by computation)이라고 말하며 컴퓨터 계산과 관찰 혹은 실험과의 차이에 대해 설명해야 할 것이라고 비판한다.

대해서만 생각할 것이 아니라 그러한 것이 어떻게 그들에게 주어지는가에 대해서도 생각해야 한다. 다시 말해, 어떻게 그러한 구조들이 특성규정되느냐에 대해 생각해야 한다.'(xiv)

덤밋은 "수학적 구조가 우리에게 어떻게 주어질 수 있는가?"에 대한 대답을 해야 하며 이에 대한 대답은 그러한 구조들이 어떻게 특성규정되느냐에 대해 설명함으로써 얻을 수 있다고 여기는 것 같다. 그리고 덤밋은 '수(학적 구조)가 우리에게 어떻게 주어지는가?'라는 물음에 대해 프레게를 따라 '어떻게 자연수에 관한 용어들을 포함한 진술들의 뜻이 고정될 수 있는가?'(xv)에 대한 물음으로 변환함으로써 보다 실질적인 대답을 얻을 수 있다고 생각한다. 말하자면, '자연수'의 의미를 특성규정함으로써 이러한 물음에 대한 대답을 얻을 수 있다는 것이다.

덤밋은 수학적 대상이란 수학적 표현을 통해 우리가 이해하게 되는 대상이라고 생각한다. 그리고 그의 입장은 우리가 '자연수'의 의미를 특성규정함으로써 그러한 대상을 이해할 수 있게 되고 그렇기에 설명적 힘을 지닌다는 것으로 보인다. 그렇다면 덤밋은 '자연수'의 의미를 어떻게 특성규정해야 한다고 여길까?

다음은 덤밋이 그의 1963a년도 논문에서 괴델 정리가 사용의미론의 반례로 고려될 수 있다는 논증을 소개하고 이에 대해 부연설명을 제시하는 부분이다. 이러한 그의 설명은 그가 '자연수' 표현의 특성규정에 대해 어떻게 고려하는지 개괄적으로 나마 알 수 있게 해준다.

'"얼마나 많이?" 그리고 "얼마나 자주"와 같은 물음에 대답하기 위해 사용하는 숫자단어(number-words)의 적용은 문제가 되지 않는다. 우리는 그러한 것들의 사용에 대해 만족스러운 설명을 어떻게 제시해야 하는지 알기 때문이다. 우리가 관심을 둘 필요가 있는 것은 순수히 산술적 진술들(purely arithmetical statement)에 대한 것이다. ... 우리가 할 수 없는 것은 '자연수'의 의미를 완전히 특성규정하는 것이다. 그리고 여기서 특성규정은 우리가 주장하도록 준비된 산술적 진술과 우리가 받아들이도록 준비된 산수에서의 추론 형식을 상술함으로써 제시된다.'(xvi)

덤밋의 '특성규정'에 대한 입장을 살펴보기 전에 먼저 눈에 띄는 것은 여기서

그가 말하는 ‘산술적 진술’이란 ‘순수히 산술적인 진술’(purely arithmetical statement)이라는 것이다. 순수히 산술적인 진술에 대한 그의 추가적인 설명은 찾아보기 어렵다. 하지만 ‘“얼마나 많이?” 그리고 “얼마나 자주”와 같은 물음에 대답하기 위해 사용하는 숫자 단어(number-words)의 적용은 문제가 되지 않는다’는 것으로 보아 순수히 산술적인 진술은 ‘말이 다섯 마리이다’와 같은 경험적인 표현이 복합적으로 사용된 산술적 진술은 아니어 보인다. 또한 덤밋(1991c)은 (의미론적) 실재론의 입장을 지니는 것을 제외하고는 프레게의 수리철학적 입장을 발전시키려 노력한다. 프레게(1884)는 참인 산술적 진술들은 분석적(analytic)이라고 주장하며 여기서 분석적이란 참인 산술적 진술들이 산술적 용어(arithmetical notion)들의 정의와 순수히 논리적인 규칙들(purely logical laws)에 의해서 논리적으로 연역됨을 의미한다. 그러므로 아마도 덤밋이 언급한 ‘순수히 산술적 진술’이란 경험적인 용어를 포함하지 않는 항등식(numerical equation)과 같은 산술적 진술이면서 분석적인 진술을 언급하는 것으로 고려될 수 있다. 또한 이러한 고려는 경험적 용어가 포함된 산술적 진술의 경우를 배제함으로써 불필요한 논의를 막아주는 이점이 있다. 그러므로 앞으로 ‘순수히 산술적인 진술’을 경험적인 용어를 포함하지 않는 분석적인 산술적 진술을 명명하는 것으로 사용할 것이다. 이제 덤밋의 ‘특성규정’에 대한 입장을 살펴보자.

앞서 제시한 인용문을 볼 때, 덤밋은 우리가 주장하도록 준비된 산술적 진술을 상술(specifying)함으로써 그리고 그러한 진술들 간의 추론형식을 상술함으로써 ‘자연수’의 의미를 특성규정할 수 있다고 여기는 것 같다.[16] 이러한 입장은 “언어를 이해하는 것은 문장의 사용을 이해하는 것일 뿐만 아니라 사용으로 환원되지 않는 의미는 의사소통 가능하지 않기 때문에 사용의미론이 받아들여져야 한다”는 그의 사용의미론에 대한 두 가지 지지 근거와도 맥을 같이 한다. 실제로 이러한 입장은 그의 주요한 의미론적 견해이므로 그의 사용의미론에 대한 입장과 앞서 소개된 특성규정에 대한 그의 입장이 어떻게 부합할 수 있는지만 대략적으로 살펴보자.

덤밋의 사용의미론에 대한 입장은 그의 1959년 논문인 “진리”(Truth)

16) 이 글에서 ‘진술’과 ‘문장’은 동일한 의미로 사용될 것이다.

와 1963a년 논문인 “괴델 정리의 철학적 의의”(The Philosophical Significance of Gödel's Theorem)에서도 등장하지만 1973년도 논문인 “직관주의 논리의 철학적 근거”(The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic)에서 보다 체계적으로 정리된다. 이 논문에서 그는 다음과 같은 세 가지 논제를 핵심적으로 주장한다.

논제 II.3.2. 진술의 의미는 그것의 사용을 결정하고 그것의 사용에 의해 완전히 결정된다.(xvii)

논제 II.3.3. 문장의 맥락에서만 단어는 의미를 지닌다.(xviii)

논제 II.3.4. 진술의 의미는 개개인간의 의사소통의 도구로서의 역할만을 수행한다.(xix)

제시된 세 가지 논제는 앞서 설명한 덤밋의 ‘특성규정’에 대한 입장과도 부합한다. 그리고 필자의 생각에 세 논제는 그가 왜 ‘특성규정’에 대해 그러한 입장을 지녔었는지에 대한 설명을 제시한다.

논제 II.3.4로 부터 알 수 있듯이 덤밋은 의사소통이 불가능한 것은 ‘의미’라고 부를 수 없다고 생각한다. 그런데 진술이 사용되지 않을 경우 의사소통이 불가능하다. 그러므로 진술의 의미가 의사소통되기 위해서는 그것의 의미가 진술의 사용에 의해 설명되어야 한다는 것이다. 바로 이 지점에서 그가 “표현의 의미에 대한 설명은 그 표현이 포함된 문장의 사용을 상술함으로써 특성규정된다”고 여기는 이유가 설명될 수 있다. 그의 세 논제를 따르자면, 문장의 의미는 그 진술의 사용에 의해 결정(논제 II.3.2)될 뿐만 아니라 문장이 포함하고 있는 표현의 의미는 문장의 맥락에서만 결정(논제 II.3.3)되기 때문이다. 다시 말해, ‘자연수’의 의미는 자연수들에 관한 진술의 사용에 의해서만 결정되며 ‘자연수’ 및 숫자 표현은 그것을 포함하는 문장의 맥락에서만 의미를 가지므로 ‘자연수’의 의미를 특성규정하기 위해서는 자연수에 관한 산술적 진술 및 이러한 진술들의 추론형식을 꼭 상술해야 한다는 것이다. 더 나아가 덤밋은 괴델 증명이 이러한 과정을 포함하기 때문에 괴델 증명은 ‘자연수’ 표현의 의미가 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정될 수 없음(명제

II.1.1)을 보이는 것이라고 생각하는 것 같다. 덤밋이 괴델 정리의 결과를 어떻게 이러한 방식으로 받아들일 수 있는지에 대해서는 추가적인 설명이 필요하다.

괴델은 그의 1931년 논문인 “수학의 원리와 그와 연관된 체계들 I의 형식적으로 결정가능하지 않은 명제에 대하여”(On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I)에서 첫 번째 불완전성 정리를 증명한다. 그는 이 증명을 제시하기 위해 모든 원초회기함수(primitive recursive function)가 형식체계 P에서 괴델수로 표현가능함(numeral-wise expressible)을 증명하는데 이 과정에서 형식체계 P의 공리들과 추론규칙을 상술한다. 여기서 형식체계 P의 공리라는 것은 $\forall x(S(x) \neq 0)$, $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$, $\forall x(x+0=x)$, $\forall x \forall y(x+S(y) = S(x+y))$, $\forall x((x \cdot 0) = 0)$, $\forall x \forall y(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$와 같은 페아노 산수(Peano-arithmetic)의 공리들인데 이들은 모든 자연수에 관해 보편양화된(universally quantified) 산술적 진술로 고려될 수 있다. 그러므로 괴델 정리 증명 과정 역시 산술적 진술과 진술들 간의 추론형식들을 상술하는 것으로 고려될 수 있고 이러한 측면에서 덤밋은 괴델 정리의 증명 과정이 ‘자연수’의 의미를 특성규정하는 절차를 포함하는 것으로 고려할 수 있을 것이다.

이렇게 덤밋은 ‘자연수’ 및 수학적 용어들이 그것들을 포함하는 문장의 맥락에서 사용을 통해 의미를 지닐 수 있음을 설명한다. 또한 그렇기에 그러한 표현들이 의미하는 바가 설명적 힘을 지닐 수 있다고 주장한다. 앞서 설명했듯이, 그는 수나 수학적 구조가 추상적 대상이라는 플라톤주의적 입장은 추상적 대상이 어떻게 설명적 힘을 가질 수 있는지에 대해 전혀 설명을 못한다고 비판한다. 특히 이러한 유일한 자연수 집합으로써의 수학적 구조 혹은 표준 모형이 존재함을 주장하는 것은 2차 논리의 사용을 허용할 경우에만 증명될 수 있다. 하지만 덤밋은 2차 논리와 유일한 자연수 집합으로서의 표준 모형의 사용을 받아들이지 않는다. 왜냐하면 이러한 태도는 그러한 표준 모형이 우리가 수나 수학적 구조에 대해 기술할 수 있는 바에 독립적으로 우리에게 주어짐을 가정하기 때문이라는 것이다. 2절의 마지막에서 언급한 덤밋의 두 번째와 세 번째 주장을 동시에 살펴보자.

2) 2차 논리와 인식 독립적 모형의 사용에 대한 덤밋의 대응

2절의 마지막에서 우리는 덤밋이 2차 논리의 사용과 유일한 자연수 집합을 표준 모형으로 사용하는 바에 대해 비판할 것이라고 언급했다. 그리고 이는 덤밋이 1963a년 논문을 쓴 주된 목적이었던 것으로 보인다. 덤밋의 1994년 논문인 "라이트에 대한 답변"(Reply to Wright)에는 이에 대한 언급이 등장한다.

'나의 주된 공격 대상은 자연수 개념에 대한 우리의 이해가 '표준 모형'의 내적 정신적 이해에 있다는 입장이었다. 그리고 여기서의 '표준 모형'은 괴델 정리에 의해 어떠한 [형식체계 P]에 의해서도 충분히 명확하게 설명될 수 없는 것이었다. 반면에, 만약 '자연수' 개념에 대한 이해가 자연수와 관련된 문장들에 대한 숙련된 사용이고 그 개념이 [완전히] 명확하다면, 그러한 정수론 진술의 진리값을 인지하는 능력과 연관된 문장에 관한 사용은 특정 [형식체계 P]에 의해서 설명될 수 있어야 한다. 괴델 정리는 그렇게 되지 않음을 보여준 것이다. (사) <u>문제는 이러한 사실을 의미에 관한 이해가 사용의 숙달이라는 원리를 배제하지 않고 설명하려는데 있었고 언어적 특성규정들에 독립적인 내적직관에 의해 파악된 잘못된 모형 개념(notion)에 호소하지 않으려는데 있었다.</u>'(xx)(필자의 강조)

(사)에서 덤밋이 언급하듯, 1963a년도 논문에서 그가 주된 비판의 대상으로 삼은 것은 "잘못된 모형 개념(notion)의 사용"이었다. 모형이라는 것은 산술적 진술에 참인 진리값을 부여하는 것으로 이해된다. 의미 없는 진술이 진리값을 지닐 수 없다는 가정 하에서 어떠한 진술이 모형에 의해 참인 진리값을 부여받는 다면 그 진술은 모형을 통해 의미를 부여받는 것으로 고려될 수 있을 것이다. 다시 말해, 형식체계 P를 구성하는 페아노 산수의 공리와 그로부터 도출되는 산술적 진술들이 표준 모형을 통해 의미를 부여 받는다는 것으로 이해될 수 있다. 아마도 (사)에서 제기하는 덤밋의 주장은 이러한 모형을 통한 의미(해석)의 부여 방식이 "의미는 사용"이라는 원리를 고려하지 않기 때문에 문제라는 것 같다. 실제로 1963a년도 논문에서도 덤밋은 '우리가 고려하고 있는 [괴델 정리가 사용의미론의 반례라는] 설명에서 잘못된 것은 모형 개념

(notion)의 잘못된 적용이다'(xxi)라고 언급한다. 그렇다면 그는 왜 모형 개념(notion)이 잘 못 적용되었다고 여기는 것일까? 덤밋은 다음과 같이 잘 못 적용된 '모형'에 대해 설명한다.

'우리가 고려하는 괴델 정리의 설명은 모형 개념(notion)을 사용해 제시되고 있는데 (아) 이 모형 개념(notion)이 마치 어떠한(any) 기술과도 독립적으로 우리에게 주어질 수 있는 것처럼 설명되고 있다. 그래서 우리가 모형을 유일하게 결정할 어떠한 기술도 찾을 수 없음에도 마치 우리 마음의 눈으로 그것의 전체를 조사할 수 있는 직관적으로 이해될 수 있는 종류인 것처럼 설명된다. 이는 수학에서 적절히 사용되고 있는 그러한 모형 개념(concept)과는 아무런 관련이 없다. 우리가 그러한 모형에 대한 기술을 제시하는 방법 이외에는 모형을 얻을 방법은 없다. (자) 만약 우리가 정수론의 모형에 대한 완전한 특성규정을 얻을 수 없다면 그러한 완전한 기술 없이는 정수론의 구조에 대한 완전한 이해(conception)를 지닐 다른 방도는 없다.'(xxii)

(아)에는 잘못된 '모형' 개념에 대한 덤밋의 입장이 드러난다. 덤밋은 괴델 정리 증명에서 고려하는 의도된 모형(intended model)은 일반적인 수학에서 고려하는 모형과는 달리 그 모형에 대한 어떠한 (완전한) 특성규정도 제시되지 않는다고 설명한다. 그리고 그러한 (완전한) 특성규정이 제시되지 않았음에도 마치 (완전한) 특성규정이 제시된 모형이 존재하는 것처럼 고려되는 문제가 있다고 비판한다. 이러한 덤밋의 입장을 보다 잘 이해하기 위해서는 (아)에서 그가 비판하는 바를 보다 명확하게 살펴 볼 필요가 있다. 여기서 모형이라는 것은 기본적으로 산술적 진술을 참으로 만족시켜주는 것으로, 거칠게 말해 진리값을 할당해 주는 것이라고 생각할 수 있다. 그리고 의미가 없는 진술에 진리값을 할당할 수는 없을 것이므로 모형은 산술적 진술이나 표현에 의미를 부여해 주는 것(해석을 제시해 주는 것)이라고도 생각할 수 있을 것이다. 그런데 덤밋은 그러한 표현들의 의미가 그 표현이 포함된 진술의 사용을 통해서 결정된다고 여긴다.(논제 II.3.2과 II.3.3) 그러므로 산술적 표현에 의미를 부여해주는 모형의 특성규정을 제시하기 위해서는 그러한 표현들이 산술적 진술을 통해 어떻게 사용되는가에 대해 상술(specify)할 필요가 있고 또한 그러한 진술 및 그로부터 도출되는 진술에 대한 추론 규칙을 상술하는 것 역시 필요하다.

그러므로 덤밋의 입장에서 형식체계 P의 올바른 모형 M은 P의 공리나 그로부터 도출되는 진술들의 사용 및 그러한 진술들에 대한 추론규칙이 상술된 하에서만 주어진다. 또한 (자)에서 그가 언급하듯이 모형 M에 대한 기술 없이 형식체계 P의 모형 M은 제시될 수 없다. 문제는 덤밋이 (아)에서 '우리가 모형을 유일하게 결정할 어떠한 기술도 찾을 수 없음에도 마치 우리 마음의 눈으로 그것의 전체를 조사할 수 있는 직관적으로 이해될 수 있는 종류인 것처럼 설명된다'라고 언급하는 부분이다. (아)에서 덤밋이 설명하려는 것은 아마도 유일한 자연수 집합으로써의 모형을 형식체계 P가 지닐 수 없다는 것으로 보인다. 왜냐하면 덤밋은 (아), (자)와 같은 설명에 이어 다음과 같은 설명을 남기기 때문이다.

'우리가 모형의 구조에 대한 우리의 분명하고 직관적인 이해의 힘을 알 때, 형식체계 내에서 [우리의 모형의 구조에 대한 직관적인 이해를] 완전히 표현하지 못한다는 것은 사실이다. 그리고 이는 우리가 형식체계를 통해 모형을 완전히 특성규정할 수 없는 이유이다.

(차) <u>우리는 형식적으로 동형(isomorphism)에 이르는 자연수들을 특성규정할 수 없다. 임의의 형식적 특성규정에 있어, 우리는 비표준적이라 인식하는 모형을 기술할 수 있다.</u>'(xxiii)

여기서 덤밋은 우리가 형식체계 내에서 우리의 모형 구조에 대한 직관적인 이해를 완전히 표현하지 못하기 때문에 형식체계를 통해서는 그 모형을 완전히 특성규정할 수 없다고 여긴다. 그리고 이를 "동형에 이르는 자연수들을 형식적으로 특성규정할 수 없다"는 것으로 해석한다. 문제는 '동형에 이르는 자연수들의 특성규정'이 어떠한 의미를 지니느냐다. 아마도 이것이 의미하는 바는 산수 체계의 모든 산술적 진술에 참값을 부여하는 유일한 자연수 집합으로써의 모형을 특성규정하는 것이 가능하지 않다는 것으로 생각된다. 왜냐하면 산수 체계에 참 값을 부여하는 임의의 두 모형이 주어질 때, 이들이 동형임은 2차 논리를 사용할 경우 증명되고 그럼으로써 유일한 자연수 집합의 표준 모형이 존재하는 것으로 증명되기 때문이다. 덤밋이 유일한 자연수 집합으로써의 모형을 형식체계 P의 표준모형으로 얻을 수 없음을 주장한다는 전제하에 우

리는 그가 다음과 같은 전제를 받아들일 수 있다고 생각할 수 있을 것 같다.

전제 II.3.5. 만약 (페아노) 산수 체계에 대한 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 완전히 특성규정될 수 있다면, '자연수'의 의미는 (단일한 형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정된다.

물론 유일한 자연수 집합으로써의 모형을 완전히 특성규정할 수 있다고 해서 덤밋이 '자연수'의 의미가 "형식체계 P"에 의해 완전히 특성규정됨을 받아들이지는 않을 것이다. 왜냐하면 완전한 2차 논리가 존재한다면 그것은 형식체계가 아닐 것이기 때문이다.[17] 하지만 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 어떤 방식에 의해 완전히 특성규정된다면, 덤밋이 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다고 여길 여지는 있을 것이다. (자)에서도 "정수론 모형에 대한 완전한 특성규정을 얻을 수 없다면 정수론의 구조에 대한 완전한 이해(conception)를 지닐 방도가 없다"고 설명하나 '그러한 완전한 기술 없이는'이란 단서를 단다. 다시 말해, 이는 유일한 모형에 대한 완전한 특성규정이 있다면 덤밋은 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정될 수 있다는 입장에 대해 일정 이상의 여지를 두는 것으로 생각할 수 있을 것이다.

만약 덤밋이 전제 II.3.5를 받아들인다고 하더라도 이것의 전건은 받아들이지 않을 것이다. 앞서 언급된 인용문의 (차)를 통해 덤밋이 "형식체계 P에 대한 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 특성규정될 수 있음"을 받아들이지 않을 것이란 해석이 가능하다. 하지만 2차 논리를 주장하는 스튜어트 샤피로의 경우, 비표준 모형은 1차 논리만을 허용할 때 생기는 것이라고 주장하며 덤밋의 입장을 비판할 수 있다. 예를 들어, 페아노 산수의 경우 상승하는 뢰벤하임-스콜렘 정리(Upward Löwenheim-Skolem Theorem)를 통해 비표준 모형이 존재함을 증명할 수 있다.[18] 상승하는 뢰벤하임-스콜렘 정리는 컴팩트성

17) 이러한 입장에 대한 근거로 괴델 정리가 고려될 수 있다. 왜냐하면 2차 논리가 완전히 형식화되지 않는다는 사실은 괴델 정리의 한 귀결로 받아들여지기 때문이다.

18) 반달렌(Van Dalen, D., 2003, p. 133)의 저서 『논리와 구조』(*Logic and Structure*)에서 보조정리(Corollary) 3.2.5를 참고하라. 주의 할 것은 비표준 모형이 존재하는 근거로 덤밋이 뢰벤하임-스콜렘 정리를 고려하지 않았을 수 있다는 것이다. 왜냐하면 구성주의적 입장을 지지하는 그의 입장을 고려할 때, 뢰벤하임-스콜렘 정리를 따르지 않을 수 있기 때문이다.

정리(Compactness Theorem)를 통해 증명될 수 있고 또한 컴팩트성 정리는 괴델(1930)의 완전성 정리를 이용해 보여 질 수 있다.[19] 문제는 샤피로(1991/2002, Ch. 4)의 주장이다. 그는 2차 논리의 언어에서는 뢰벤하임-스콜렘 정리, 콤팩트성 정리 그리고 완전성 정리가 성립하지 않음을 주장한다. 만약 "페아노 산수가 비표준 모형을 지닌다"는 주장이 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 존재함에 대한 반례가 될 수 있으며 또한 이 주장의 주된 근거가 뢰벤하임-스콜렘 정리라면, 이는 문제가 될 수 있다. 다시 말해, 이러한 두 전제 하에 2차 논리의 언어에서도 "페아노 산수 체계에 대한 비표준 모형이 존재한다"는 주장을 반박하고 페아노 산수체계가 유일한 자연수 집합을 표준 모형으로 지닐 수 있다고 주장하는 것이다.

논의를 위해 우선 샤피로가 왜 뢰벤하임-스콜렘 정리가 2차 논리의 언어에서 증명되지 않는다고 바라보는지 살펴보자. 그는 다음과 같은 이유로 뢰벤하임-스콜렘 정리가 2차 논리의 언어에서 적용되지 않음을 설명한다.

'2차 산수 [체계] AR은 범주가 정해진다. ... [AR]은 나열가능한 무한한 모형들을 가지며 어떠한 셀 수 없는 모형도 지니지 않는다. 2차 해석학 AN 역시 범주가 정해진다. [AN]은 셀 수 없는 모형들을 가지며 어떠한 셀 수 있는 모형도 지니지 않는다. 그러므로 우리는 다음을 얻는다.

예를 들어, 찰스 맥카티와 니일 테넌트(Charles McCarty and Neil Tennat, 1987)는 뢰벤하임-스콜렘 정리가 직관주의나 구성주의 수학에서는 증명되지 않음을 보인바 있고 이들의 입장을 덤밋이 따를 여지가 있다면 비표준 모형에 대한 덤밋의 입장은 조금 다른 측면에서 고려될 수 있을 것이다. 하지만 우리의 논의가 2차 논리를 비판하는 덤밋의 입장을 살펴보는 데 있고 덤밋이 공격하는 지점이 뢰벤하임-스콜렘 정리 그 자체이 있지 않다는데서 이러한 고려는 차치할 수 있을 것 같다.

19) 여기서 완전성 정리로 언급한 것은 Γ를 식들의 집합이라 할 때, "만약 Γ가 일관적이라면 Γ는 만족가능하다(혹은 Γ가 모형을 지닌다)"는 것이다. 일반적으로 뢰벤하임-스콜렘 정리가 컴팩트성 정리를 통해 증명되고 컴팩트성 정리는 완전성 정리에 의해 보여지니 뢰벤하임-스콜렘 정리는 완전성 정리의 한 귀결로 여겨진다. 하지만 완전성 정리 역시 뢰벤하임-스콜렘 정리의 귀결로 고려될 수 있을 것이다. 실제로 역사적으로는 뢰벤하임(Löweheim, L, 1915)이 만족가능한 임의의 1차 식들이 셀 수 있는 모형(countable model)에서 만족가능함을 가장 먼저 보였었다. 그리고 다음으로 스콜렘(Skolem, T, 1922)이 같은 결과가 그러한 식들의 열거가능한 집합(denumerable set)에 대해서도 증명될 수 있음을 보였다. 마지막으로 괴델은 스콜렘의 1922년 증명을 술어 논리에 대한 증명으로 확장했으며 자신의 완전성 정리가 스콜렘의 증명에 대한 사소한 귀결이라고 밝힌 바 있다.(괴델의 회고에 대해서는 도슨(Dawson, J. 1997, p. 58)을 참고하라.)

정리 4.12. 표준 시멘틱(standard semantic)을 지니는 2차 언어들에서는 뢰벤하임-스콜렘 정리가 적용되지 않는다.'(xxiv)

앞서 언급했듯이 산수 체계에 관한 범주성 증명은 그 체계에 대한 임의의 두 모형에 대해, 그 두 모형이 동형임을 보여준다. 다시 말해, 2차 논리의 언어에서 표준 시멘틱[20]을 지닐 때, 산수 체계에 관한 모든 모형은 자연수 집합으로써의 표준 모형과 동형임이 증명됨으로써 산수 체계는 유일한 자연수 집합을 표준 모형으로 지닌다는 것이다. 산수 체계에 대한 비표준 모형이라는 것은 산수 체계가 지닌 공리와 그로부터 도출된 모든 진술들을 만족시키는 모형이지만 자연수가 아닌 원소들의 집합을 부분 집합으로 지니는 그러한 모형을 말한다. 하지만 샤피로의 입장은 2차 논리의 언어에서는 '유일성'이 표현가능함으로 인해 이러한 비표준 모형을 산수 체계의 모형으로 부터 배제할 수 있게 된다는 것으로 보인다. 그렇다면 덤밋은 왜 2차 논리를 받아들이더라도 비표준 모형이 존재한다고 여기는 것일까?

덤밋은 플라톤주의자들이 2차 논리를 수용한다고 여기는 하에서 2차 논리가 완전히 형식화되지 않는다는 사실이 시사하는 바를 다음과 같이 설명한다.

'기초 수학 이론의 모든 것에 대한 자연스런 공리화는 2차적인 것이다. 그러므로 2차 논리가 완전히 형식화되지 않는다는 사실은 이론들 — 1차에서나 2차에서나 — 그 자체도 완전히 형식화되지 않음을 보여준다.'(xxv)

'산수의 형식체계에 대한 불완전성의 의미는 그것이 비표준 모형들을 가진다는 것이다. 형식체계가 이 구조에 대한 우리의 직관을 완전히 사로잡는데 실패했기 때문에 그것이 표준적이지 않은 구조들을 허용한다고 말하는 것은 자연스럽다.'(xxvi)

20) 'the theory of meaning', 'meaning theory' 그리고 'semantic theory'는 모두 '의미론'으로 번역된다. 하지만 덤밋이 'semantic theory'와 'theory of meaning'를 동일한 의미로 여기지는 않을 수 있다. 그러므로 오해를 피하기 위해 'semantic'은 편의상 '시멘틱'으로 표기하기로 한다.

제시된 덤밋의 언급에서 '형식화' 그리고 '형식체계'의 의미를 어떻게 받아들이냐에 따라 그의 언급은 다르게 해석될 수도 있을 것이다. 하지만 그가 '산수의 형식체계에 대한 불완전성'으로 의도하는 것은 괴델의 불완전성 정리가 보여주는 바라고 생각하더라도 무리가 없을 것이다. 왜냐하면 괴델 정리가 2차 논리의 언어에서 모든 타당한 산술적 진술들은 회기적으로 나열될 수 없음을 보인 것이기도 하기 때문이다. 그리고 이러한 결과는 2차 논리를 지지하는 이들 역시 인정하는 바이다. 흥미로운 것은 덤밋의 이와 같은 언급을 고려할 때, 우리가 가질 수 있는 산수 체계의 모형은 우리가 형식체계 P에 의해 그 사용을 설명할 수 있는 참인 산술적 진술들에 대한 것으로 제한된다는 것이다. 앞서 언급했듯이 덤밋은 "진술의 의미는 사용을 완전히 결정하고 그 사용에 의해 완전히 결정된다"(논제 II.3.2)는 논제를 받아들인다. 그러므로 덤밋의 입장을 최대한 동정적으로 이해해 볼 때, 그의 입장에서 형식체계 P에 의해 증명도 반증도 되지 않는 산술적 진술 U_P는 형식체계 P에 의해 그 사용이 설명되지 않은 진술이 된다. 그리고 U_P는 형식체계 P의 사용에 의해 그 의미가 설명되지 않았으니 형식체계 P의 모형은 U_P에 대한 의미나 진리값을 제시해주지 못하는 것이 된다.[21] 여기에 P가 1차 형식체계인 경우 1차 논리의 완전성 정리에 의해 (혹은 뢰벤하임-스콜렘 정리에 의해) P의 비표준 모형이 제시될 수 있다. 다시 말해, U_P나 $\neg U_P$는 P로부터 증명도 반증도 되지 않기 때문에 $\neg U_P$나 U_P를 포함한 형식체계로 부터 모순이 도출되지 않는다. ($P \cup \{U_P\} \nvdash \bot$ 이거나 $P \cup \{\neg U_P\} \nvdash \bot$ 이다.) 이때, U_P와 $\neg U_P$를 포함한 형식체계들에 완전성 정리를 적용할 경우 각 체계들의 모형은 각각 U_P와 $\neg U_P$에 참값을 부여할 수 있다. U_P를 참이게 하는 P의 모형 $\mathbb{N}$이 표준모형이라면 $\neg U_P$에 참값을 부여하는 P의 모형 $\mathbb{M}$은 비표준 모형이 된다. 즉 P가 비표준 모형을 지니게 되는 것이다.

형식체계 P의 모형에 대한 이러한 해석은 덤밋의 의미론적 입장에 기인하는 것이라고 생각된다. 왜냐하면 덤밋은 의미 전체론(holism)에 대해 비판

21) "P에 의해 증명가능한 진술만이 P에 의해 사용될 수 있다"는 전제 하에서 U_P가 P에 의해 사용되지 않는 것이지 U_P의 사용 자체가 전혀 설명되지 않는다고는 말할 수 없을 것이다. U_P의 사용에 대한 설명이 불충분할지라도 P의 공리 및 추론규칙과 U_P의 구성에 의해 U_P의 사용은 설명된다고 할 수 있을 것이다.

하는 과정에서 의미론에 대해 다음과 같이 주장하기 때문이다.

‘분명한 것은 사용가능한 모든 의미론이 그렇듯, 그것이 유한한 기초를 지녀야 한다는 것이다. 그러므로 언어를 아는 화자가 지닌 지식은 유한하게 한정되어 있다. 비록 그것이 무한하게 많은 문장들의 이해를 제시하더라도 말이다.’(xxvii)

언급된 바와 같이 덤밋은 사용가능한 의미론은 유한한 기초를 지녀야 한다고 생각한다. 이를 다음과 같은 논제로 제시한다.

논제 II.3.6. 모든 사용가능한(workable) 의미론은 유한한 기초를 지닌다.

“유한한 기초”가 무엇인지 그리고 유한하다는 정도가 어느 정도인지에 대해 의견이 분분할 수 있다. 하지만 형식체계 P로부터 도출 가능한 진술들에 대해 그 진술들의 사용을 설명했다고 여기는 것으로 보아 어떤 체계가 지닌 공리(전제)들과 그로부터 다른 진술들을 이끌어 내는 추론 원리들의 수가 유한하다면 혹은 유한하지 않더라도 유한하게 기술할 수 있다면 그 체계는 유한한 기초를 지닌다고 생각할 수 있을 것 같다. 예를 들어, 자연수의 나열 혹은 순수히 산술적인 진술에 대한 이해 역시 형식체계 P가 지닌 유한하게 기술할 수 있는 페아노 산수의 공리와 그로부터 다른 진술들을 이끌어 내는 추론 원리들을 통해 이해가 가능하다. 하지만 형식체계 P만으로는 P 내에서는 증명도 반증도 되지 않는 비결정성 진술 U_P의 의미를 설명할 수 없는 것이 된다. U_P의 의미를 설명하기 위해서는 형식체계 P에 U_P를 도출하기 위한 원리를 추가해야 하는데 이를 추가한 형식체계 $P+$를 구성하더라도 $P+$에서 증명도 반증도 되지 않는 산술적 진술 U_{P+}는 괴델 정리에 의해 항상 존재하게 마련이다.[22] 그러므로 덤밋의 입장은 어떠한 형식체계 P이던지 그것이 유한한 기초를 지닌다면 모든 타당한 산술적 진술을 나열할 수 없고 그들의 사용에 대해서도 설명할 수 없으므로 모든 타당한 산술적 진술에 대한 모형 역시 제시될 수 없다는 것으로 보인다.

---

22) 여기서 $P+$는 P의 확장(the extension of P)인 체계이다.

이제 마지막으로 유일한 자연수 집합을 형식체계 P가 표준모형으로 지닐 수 있는 가에 대한 덤밋과 2차 논리의 지지자의 입장이 대립하는 지점을 정리해 보자. 아마도 덤밋은 형식체계 P로부터 도출되는 진술들을 상술하고 그러한 진술들을 도출하는 추론규칙을 상술하는 과정을 거침으로써 P의 의도된 모형이 특성규정된다고 여기는 것 같다. 다시 말해, 그러한 순수히 산술적인 진술들을 사용을 설명함으로써만 그러한 진술들에 의미를 부여하는 의도된 모형에 대한 규정이 가능할 것이란 생각으로 보인다. 그러므로 형식체계 P에 의해 증명도 반증도 되지 않아 P에 의해서는 사용될 수 없는 순수히 산술적인 진술 U_P의 의미는 P의 의도된 모형 I_P만에 의해서는 할당될 수 없다고 여기는 것 같다. 그리고 형식체계 P를 $P+$로 확장해 U_P에 대한 사용을 설명할 수 있고 그래서 $P+$의 의도된 모형인 I_{P+}에 의해 U_P가 해석을 부여받을 수 있다고 하더라도 괴델 정리에 의해 $P+$에서 그 사용이 설명될 수 없는 U_{P+}가 항상 존재하게 마련이다. 그리고 논제 II.3.6을 받아들이는 한 형식체계 P나 이것의 확장인 다른 체계의 모형이 그 의미를 설명할 수 없는(혹은 진리값을 부여할 수 없는) 순수히 산술적인 진술이 존재하게 마련일 것이다. 그러므로 이러한 결과를 받아들이지 않기 위해서 2차 논리의 지지자들은 “사용은 의미이다”라는 논제 II.3.2를 부정하던가 논제 II.3.6을 부정해야 할 것이다.[23] 즉, 더 적절한 설명이 없는 한 논제 II.3.2와 II.3.6을 받아들이고 말고가 덤밋과 2차 논리의 지지자들 간의 대립지점이 될 수 있다는 말이다.

덤밋에 대한 지금까지의 해석이 옳다면 그는 형식체계 P가 비표준 모형을 지닌다는데 동의할 것이며 유일한 자연수 집합으로써의 모형은 형식체계에 의해 완전히 특성규정될 수 없다는 입장을 지닐 것이다. 덤밋이 이러한 입장을 지니는데는 2차 논리의 사용을 허용하지 않기 때문이라 생각할 수 있는데 그가 논제 II.3.6이외에 어떤 이유로 2차 논리의 사용을 허용하지 않는지에 대해 더 알아보자.

2차 논리에 대한 비판을 찾아 볼 수 있는 글은 앞서 언급했던 1967년도 저작 “플라톤주의”이다. 이 논문에서 덤밋(1967, pp. 207-208)은 플라

23) 명제 I.1.1과 논제 II.3.2 그리고 전제 II.3.5를 받아들일 경우 명제 I.1.1을 전제 II.3.5의 후건부정으로 적용해 형식체계 P에 대한 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 완전히 특성규정될 수 없음이 보여짐을 참고하라.

톤주의자와 그가 지지하는 구성주의자(constructivist)의 차이를 주어진 집합의 멱집합 개념(notion)이 확정적임을 받아들이고 받아들이지 않고에 있다고 말한다. 다른 말로, 이는 2차 논리를 허용하고 하지 않고에 있다는 것으로 이해 가능하다.[24] 2차 논리에 대해 덤밋은 적어도 두 가지 비판을 제시한다. (카) 덤밋(1967, p. 208)은 2차 논리를 허용하는 입장을 플라톤주의로 고려해 이들이 초-전체(super-totality)가 존재한다는 가정을 하기에 문제가 된다고 주장한다. 둘째로, (타) 덤밋(1967, pp. 207-208)은 2차 논리를 사용해 얻은 자연수의 유일한 집합이 구조로써 존재함을 받아들이는 것은 그러한 구조를 통해서 자연수 전체를 명확하게 관찰 및 이해할 수 있는 직관적인 능력을 우리가 지니고 있음을 가정하게 된다고 말한다. 이 두 가지 비판에 대해 더 자세히 알아보자.

산수 체계에 대한 범주성은 자연수가 다음 수, 덧셈, 곱셈 함수에 최소한으로 닫혀(minimally closed)있음을 보임으로써 증명되는데 이를 위해서는 2차 논리의 언어가 요구된다.[25] 문제는 2차 논리의 언어에서는 술어나 집합에 대한 양화를 포함하기 때문에 자연수 집합의 모든 부분 집합에 대한 양화를 허용하고 그럼으로써 자연수의 멱집합 혹은 그 이상의 집합이 존재하는 것으로 고려한다는 것이다.

우리가 자연수 집합의 존재를 전제하더라도 이를 통해 자연수의 멱집

24) '멱집합 개념이 확정적임'을 어떻게 해석하느냐에 따라 플라톤주의와 구성주의가 구별된다는 입장을 2차 논리를 허용하느냐 하지 않느냐의 문제로 확장하는데는 물론 논란의 여지가 있다. 예를 들어 2차 논리의 허용이 플라톤주의를 가정하는 가도 논란거리다. 조지 블로스(George Boolos, 1984 and 1985)와 같은 철학자는 복수 양화사(plural quantification)를 도입해 2차 논리의 사용이 우리를 프레게의 개념이나 집합(class)과 같은 별도의 실체에 존재론적으로 개입하게 하는 것은 아님을 주장하기 때문이다.

덤밋의 입장과 관련하여 보다 나은 논의를 위해서는 그가 '개념이 확정적임'이라고 표현하는 바의 의미에 대해 더욱 살펴봐야 하고 또한 그 확정성이 2차 논리 하에서만 얻어질 수 있는가에 대해서도 고려되어야 할 것이다. 하지만 1967년도 논문에서 덤밋은 적어도 2차 논리를 비판할 때, "모든 플라톤주의자는 2차 논리의 사용을 허용하고 모든 2차 논리를 사용하는 입장은 플라톤주의이다"라는 가정에 암묵적으로 동조하고 있는 것 같다. 그러므로 이 글에서 2차 논리에 대한 덤밋의 비판을 고려할 때는 이와 같은 전제가 있음을 밝혀둔다.

25) f를 집합 S에 대한 2항 연산자라고 하고 A를 S의 부분 집합이라고 할 때, A가 연산자 f에 닫혀있다는 것은 임의의 $x, y \in A$에 대해 $f(x,y) \in A$임이 정의되는 경우이다. 어떤 집합에 대한 연산자들이 최소한으로 닫혀있음에 대한 정의를 위해서는 2차 논리의 언어가 필요한데 이에 대해서는 샤피로(1991/2002)의 5장을 참고하라.

합(실수 집합)을 구성할 수는 없다.[26] 하지만 그 반대의 상황은 가능하다. 자연수의 멱집합과 같은 실수 크기 혹은 그 보다 더 큰 크기의 집합이 존재함을 받아들일 경우 유일한 자연수 집합을 모형으로 특성규정할 수 있다. 그러나 사용가능한 의미론은 유한한 기초만을 지녀야 한다(논제 II.3.6)고 생각하는 덤밋의 입장에서는 그러한 집합을 특성규정할 수 없는 문제가 생긴다. 왜냐하면 괴델 정리에 의해 '자연수'의 의미는 (어떠한 형식체계 P에 의해서도) 완전히 특성규정될 수 없고(명제 I.1.1) 이 사실을 "만약 산수 체계에 대한 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 완전히 특성규정될 수 있다면, '자연수'의 의미는 (단일한 형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정된다"는 전제 II.3.5에 후건 부정으로 적용하게 되면 유일한 자연수 집합으로써의 모형조차도 얻을 수 없기 때문이다. 유일한 자연수 집합에 대한 완전한 특성규정 조차 불가능하니 자연수의 멱집합이나 그 이상의 집합에 대한 완전한 특성규정은 제시될 수 없을 것이다. 2차 논리에 대한 덤밋의 첫 번째 비판인 (카)는 이와 관련된다. 덤밋(1967, p. 208:19)은 플라톤주의자들이 초-전체(super-totality)를 단순히 가정하는 실수를 범한다고 비판한다. 2차 논리를 허용하는 플라톤주의자들은 이러한 초-전체를 가정함으로써 유일한 자연수 집합뿐만 아니라 실수 집합까지도 규정한다. 하지만 덤밋은 이러한 초-전체의 존재에 대한 가정은 잘못이라고 비판하는 것이다. 이제 (타)로 넘어가 보자.

(타)에서 언급했듯이 덤밋은 2차 논리를 허용해 자연수의 유일한 집합이 산수체계의 구조로써 존재한다는 입장은 추상적 대상인 구조가 실제로 존재하며 그러한 추상적 존재자에 대해 우리가 인식할 수 있고 그렇기에 설명적 힘을 지닌다는 가정을 한다고 비판한다. 2차 논리를 허용하는 입장을 플라톤주의로 고려할 때, 이에 대한 덤밋(1967, p. 207)의 언급은 다음과 같다.

'플라톤주의는 우리의 수학적 이해에 대한 사실들을 가장 단순하게 설명한다는 데서 호소력을 얻는다. 다시 말해, 추상적 대상들의 구조가 실제로 존재한다는 논제와 우리가 물리적 대상들을 인식할 능력이 있듯이 추상적 대상들에 대한 지적인 직관의 능력으로 그러한 대상들을 이해할 수 있다는 논제에 의해 호소력을 얻는다.'(xxviii)

26) 이는 칸토르의 대각화 논증을 통해서 증명될 수 있다. 칸토르의 대각화 논증(diagonal argument)에 대해서는 예흐(Yech, 1999)의 저서 4장을 참고라하.

덤밋의 언급처럼 2차 논리를 허용할 경우 추상적 대상들의 구조가 실제로 존재함을 가정할 수 있으며 그러한 추상적 대상들을 인지할 능력이 있어야 그 대상들이 설명적 힘을 지닐 수 있을 것이다. 하지만 이는 증명도 반증도 하기 어려운 문제일 것이다. 그렇기에 덤밋은 정당화의 부담은 플라톤주의자에게 있다고 여길 수 있다.

하지만 2차 논리를 허용하는 플라톤주의자들은 산수 체계에 대한 유일한 자연수 집합으로서의 구조가 존재함을 증명할 수 있다는 것은 그러한 구조가 추상적으로라도 존재함을 보이는 것이며 또한 그러한 대상이 설명적 힘을 지니기에 증명이 가능하다고 주장할 수 있다. 여기서 더 나아가 덤밋이 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다고 주장하는 것은 괴델 정리의 결과에 의한 것으로 형식체계 P에 의해서 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는 것이지 우리의 지적능력에 의해서는 완전한 특성규정이 제시될 수 있다고 반박할 수 있다. 이에 대한 덤밋의 대답을 고려하기 위해서는 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다는 것이 형식체계 P에 의해서인지 아니면 그 이외의 방식에 의해서도 안 된다는 것인지에 대한 논의가 필요하다. 이 문제는 3장에서 더욱 자세하게 다룰 것이다.

한 가지 분명한 것은 덤밋의 2차 논리를 허용하는 플라톤주의자들에 대한 지적은 의미론은 이해의 이론이라는 입장에 근간한다는 것이다. 덤밋(1973/1981, p.92)은 의미론을 고려할 때 '의미란 무엇인가?'(What is meaning?)와 같은 물음을 고려할 경우 비트겐슈타인이 지적했듯이 불필요한 존재자들을 실체화(hypostatizing)하는 문제가 발생할 수 있다고 주장한다. 그는 '보다 주의를 기울여 집중할 필요가 있는 복합 표현은 '...의 의미를 알다'이고 그래서 의미론은 이해의 이론'(xxix)이라고 주장한다. 다시 말해, 추상적인 대상으로써의 유일한 자연수 집합의 존재에 대한 얘기는 불필요한 존재자를 실체화한 것이라서 설명적 힘을 가질 수 없으므로 '자연수'라는 표현을 우리가 어떻게 이해하는 가에 대해 주의를 기울여야 한다는 것이다. 이 글은 덤밋의 사용의미론의 반례로 괴델 정리가 고려될 수 있느냐에 대한 문제를 다룬다. 그러므로 2차 논리를 지지하는 플라톤주의자들의 입장을 따르기보다 의미론은

이해의 이론이라는 덤밋의 입장을 따르는 것이 더욱 적합할 것이다. 하지만 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다는 그의 주장이 형식체계 P에 의해서만 안 된다는 것인지 그 이외의 방식에 의해서도 안 된다는 것인지는 고려되어야할 문제다. 만약 그의 입장이 형식체계 P에 의해서만 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되지 않고 그 이외의 방식에 의해서는 완전히 특성규정될 여지가 있다는 것이면 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않기 때문에 반대논증 II.1.3의 전제 (2)가 잘못되었다는 그의 입장은 재고될 여지가 있기 때문이다. 그러므로 다음 장에서는 이 문제에 대해 더욱 자세하게 알아보자.[27]

27) 덤밋의 입장에서 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되는가에 대해 고려할 수 있는 또 다른 방향은 ‘자연수’의 의미가 완전히 명확한가를 따져 보는 것이다. 논제 II.1.4와 논제 II.3.5를 고려할 때, ‘자연수’의 의미가 완전히 명확하지 않다면 ‘자연수’의 의미는 (형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정될 수 없다. 또한 이를 논제 II.3.5에 적용할 경우, 산수 체계에 대한 유일한 자연수 집합으로써의 모형도 완전히 특성규정될 수 없다는 결과를 얻을 수 있을 것이다.

III. '자연수'의 의미에 관한 특성규정의 문제

3장에서는 "'자연수'의 의미는 형식체계 P 이외의 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는가?"에 대한 대답을 얻기 위해서는 무엇을 고려해야 하는가에 초점을 둘 것이다. 3장 1절에서는 논의를 진행하기에 앞서 덤밋이 사용하는 '특성규정'이란 표현을 이 글에서는 어떻게 이해할 것인지에 대해 언급할 것이다. 그리고 이 과정에서 '자연수'의 의미에 대한 완전한 특성규정이 형식체계 P를 확장함으로써 제시될 수 있다는 것이 덤밋의 입장이라 여기는 오해 역시 해소할 것이다. 또한 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 논증이 덤밋이 표면적으로 제시하지 않은 논증으로 개선될 여지가 있음을 살펴보고 2절로 넘어갈 것이다. 2절에서는 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 덤밋의 입장이 설명되기 위해서는 "형식체계 P에 의한 특성규정이 가장 적합한 특성규정인가?"라는 물음을 고려할 필요가 있에 대해 언급할 것이다. 그리고 형식체계 P 이외의 방식으로 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정될 수 있는지를 평가하기 위해 '형식화'를 덤밋이 어떻게 고려했는지 살펴 볼 필요가 있음을 언급할 것이다. 3절에서는 덤밋이 '형식화' 혹은 '형식체계에 의한 특성규정'을 어떻게 이해했는지를 살펴 봄과 함께 형식체계 P이외의 방식이 '자연수'의 의미를 특성규정하는 경우를 고려할 것이다. 그리고 그러한 방식이 형식체계라면 그것은 P의 확장일 수밖에 없을 것이며 이 경우 괴델 정리가 적용되기 때문에 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 입장은 여전히 유효하다는 결론을 제시할 것이다. 4절에서는 형식체계 P 보다 더 적합한 특성규정방식이 형식체계가 아닐 경우를 고려할 것이다. 특히 직관주의자들이 "'증명가능성'의 의미가 본질적으로 비형식적이다"라는 말로 의도하는 바를 살펴봄으로써 덤밋과 직관주의자들이 '자연수'의 의미가 비형식적 방식으로 완전히 특성규정될 수 있다고 주장할 여지가 있는지를 살펴 볼 것이다. 그리고 덤밋이나 직관주의자들이 말하는 "'증명가능성'의 의미가 본질적으로 비형식적이다"라는 말의 의미는 '자연수'나 '증명가능성'의 의미가 비형식적인 방식으로 완전히 특성규정될 수 있음을 말하는 것은 아님을 언급할 것이다. 마지막으로 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되냐 되지 않냐에

대한 대답은 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능한가에 대한 물음에 대답함으로써 얻어질 것임을 언급할 것이다.

1. 예비사항: 덤밋이 사용하는 '특성규정'과 오해할 수 있는 것들

1) 덤밋이 사용하는 '특성규정'

이전 장에서 필자는 덤밋이 괴델 정리의 결과를 명제 II.1.1인 "어떠한 형식체계 P에 의해서도 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정될 수 없다"와 같이 해석한다고 설명했다. 하지만 덤밋이 형식체계를 통해 어떠한(some) 표현의 의미나 구조를 규정할 때 꼭 '완전히 특성규정되다'라는 표현만을 쓰는 것은 아니다. 예를 들어, 1994년 저작인 "라이트에 대한 대답"(Reply to Wright)과 1967년 저작인 "플라톤주의"(Platonism)에서 그가 사용하는 표현은 다음과 같다.

'... 자연수 개념에 대한 우리의 이해는 '표준모형'에 대한 내적 이해에 있고 이는 괴델 정리의 결과에 따라 어떠한(any) [형식체계 P]에 의해서도 완전히 명료화될 수 없다.'(xxx)

'2차 논리가 완전히 형식화되지 않는다는 사실은 그것이 1차 이론이던 2차 이론이던 그들 자체가 불완전하게 형식화될 수 있음을 보여준다.'(xxxi)

1994년 저작에서 덤밋은 '어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정될 수 없다'는 표현 대신 '어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 명료화될 수 없다'는 표현을 사용하며 1967년 저작에서는 '완전히 형식화되지 않는다'는 표현을 사용한다.[28] 다시 말해, '완전히 특성규정되다'라는 표현 이외에 다른 표

28) 물론 1967년 저작의 '완전히 형식화되지 않는다'는 표현은 '자연수'의 의미를 형식체계 P를 통해 특성규정하는 것은 아닐 수 있다는데서 다른 의미를 지닌다고 고려할 수 있을 것이다. 하지만 ''자연수'의 의미가 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정되지 않는다'는 표현이 ''자연수'의 의미가 완전히 형식화되지 않는다'는 표현과 어떠한 점에서 차이가 나는지 그리고 덤밋이 이러한 표현을 실제로 차이가 나게 사용하는지에 대한 설명이 제시되지 않는 한 두 표현을 혼용할 여지는 충분히 있다.

현을 채택할 수도 있다는 말이다. 실제로 에이드리안 무어(Adrian Moore)는 그의 1998년 저작인 “'괴델 정리의 철학적 의의' 보다 더 나아가서”(More on 'the Philosophical Significance of Gödel's Theorem')에서 ‘정확히 형식적인 특성규정’(precise formal characterization)이란 용어로 덤밋의 입장을 기술한다.(xxxii) 그리고 크리스핀 라이트(Crispin Wright)는 그의 1994년 저작 “" 괴델 정리의 철학적 의의"에 대해여: 몇 가지 쟁점들”(About "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem": Some Issues)에서 ‘완전한 기술’(complete description), ‘체계적인 기술’(systematic description) 그리고 ‘체계적인 특성규정’(systematic characterization)과 같은 용어들을 사용한다.(xxxiii) 하지만 이러한 대안적인 용어의 사용은 덤밋이 ‘완전히 특성규정하다’라는 표현을 통해 의도하는 바를 왜곡시킬 수 있고 서로 다른 의미를 의도함으로써 생산적인 논쟁을 방해할 수 있다. 또한 덤밋이 사용한 용어인 ‘완전히 명료화되다’ 그리고 ‘완전히 형식화되다’와 같은 표현 보다 ‘완전히 특성규정되다’를 사용하는 것이 괴델 정리와 관련된 그의 철학적 입장을 다루는데 유익할 것이라 생각된다. 이에 대해서는 두 가지 이유가 제시될 수 있다. 첫째로, 덤밋이 사용하는 ‘특성규정’은 그 대상이 ‘자연수’의 의미이더라도 형식체계에 의한 특성규정에 국한되는 것은 아니어 보이기 때문이다. 그리고 둘째로, 덤밋이 어떤 표현의 의미에 관한 설명 혹은 규정을 형식체계를 통해서만 제시할 수 있다고 여기지 않는다는 전제 하에서, ‘완전히 특성규정하다’는 표현은 다른 표현들이 의미하는 바를 포괄할 수 있는데 반해 ‘형식화하다’ 그리고 ‘명료화하다’와 같은 다른 표현들은 ‘완전히 특성규정하다’는 표현을 포괄하지는 못할 것이기 때문이다. 이에 대해 조금 더 논의해 보자.

단적으로 말해 덤밋은 어떤 표현의 의미를 규정할 때 ‘특성규정하다’는 표현을 매우 즐겨 사용하나 ‘형식화하다’ 그리고 ‘명료화하다’는 표현은 거의 사용하지 않는다. 그리고 ‘명료화하다’와 같은 표현은 그가 즐겨 사용하는 ‘사용하다’ 혹은 ‘발현하다’와 혼동될 경우 ‘‘자연수’의 의미를 특성규정하다’와 ‘‘자연수’의 의미를 (진술의 사용을 통해) 발현하다’가 서로 같은 의미를 지니는 것으로 혼동될 여지가 있다. 논란의 여지는 있겠지만 괴델 정리와 관련 주제를 고려할 때, ‘특성규정하다’는 표현과 ‘사용하다’ 혹은 ‘발현하다’는 표현은

사로 다른 의미를 지니는 것으로 고려될 수 있다. 먼저, 괴델 정리와 관련해 ‘자연수’의 의미에 대한 특성규정은 참인 순수히 산술적 진술을 상술함으로써 얻을 수 있는데 반해 사용(발현)의 대상이 되는 진술들은 꼭 참(혹은 올바른 주장)일 필요가 없기 때문이다. 다음과 같은 덤밋의 언급을 살펴보자.

‘“얼마나 많이?” 그리고 “얼마나 자주”와 같은 물음에 대답하기 위해 사용하는 숫자 단어(number-words)의 적용은 문제가 되지 않는다. 우리는 그러한 것들의 사용에 대해 만족스러운 설명을 어떻게 제시해야 하는지 알기 때문이다. 우리가 관심을 둘 필요가 있는 것은 *순수히 산술적인 진술들(purely arithmetical statement)*에 대한 것이다. ... 우리가 할 수 없는 것은 '자연수'의 의미를 완전히 특성규정하는 것이다. 그리고 여기서 특성규정은 우리가 주장하도록 준비된 산술적 진술과 우리가 받아들이도록 준비된 산수에서의 추론 형식을 상술함으로써 제시된다.’(필자의 강조)(xxxiv)

덤밋은 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 입장을 소개한 직후 위와 같은 부연설명을 제시하면서 “우리가 관심을 둘 필요가 있는 것은 순수히 산술적 진술들에 대한 것이다”라고 말한다. 앞서 2장 3절에서 언급했듯이 덤밋이 언급한 ‘순수히 산술적인 진술’이란 경험적인 용어를 포함하지 않는 항등식과 같은 산술적 진술이면서 분석적인 진술을 언급하는 것으로 보인다. 또한 여기서 조금 더 나아가자면, 우리가 이 글의 주제에서 다루어야 할 ‘순수히 산술적인 진술’은 참으로 인식되면서 항등식일 뿐만 아니라 보편양화된 산술적 진술을 포함해야 할 수 있다. 이에 대한 설명을 위해 다음과 같은 덤밋의 특성규정에 대한 설명을 살펴보자.

‘... 개념은 그것의 적용 기준에 의해서만 특성규정되는 것이 아니다. 다시 말해, 그 개념 아래 ... 어떠한 대상이 포섭되는 지에 대한 판단의 기준에 의해서만 특성규정 되는 것이 아니고 그 개념 아래 포섭되는 *모든 것에 유효한 것*에 대해 말하는 기준에 의해서도 특성규정된다.’(필자의 강조)(xxxv)

우리가 주목할 것은 ‘그 개념 아래 포섭되는 모든 것에 유효한 것에 대해 말하는 기준에 의해서도 특성규정된다’는 부분이다. 예를 들어, ‘자연수’ 표현에 대한 것이라면, 자연수 집합의 모든 원소에 유효한 진술을 말하는 기준에 의해서 ‘자연수’의 의미가 특성규정된다는 것이다. 그리고 ‘자연수 집합의 모든

원소에 유효한 진술'이 의미하는 바는 모든 자연수에 대해 보편양화된 진술을 말하는 것으로 해석될 수 있다. 그러므로 적어도 이 글에서 '순수히 산술적 진술'이라 함은 보편양화된 항등식 및 경험적인 용어를 포함하지 않는 항등식이면서 "참으로 인식되는" 산술적 진술을 의미할 것이다.

앞서 언급했듯이 괴델 정리와 관련해 '자연수'의 의미를 특성규정하는 것은 참으로 인식되는 순수히 산술적인 진술들을 상술함으로써 성취될 수 있다. 그렇다면 덤밋이 '사용하다'와 '발현하다'라는 표현을 사용할 때, 그 표현을 통해 설명하려는 대상이 항상 참인 진술이라고 할 수 있는가? 그렇지는 않을 것이다. 덤밋은 '참과 거짓과 같은 용어의 근간은 화자가 어떤 주장을 할 때 그 주장이 객관적으로 *옳은가 그른가*에 있다'(xxxvi)고 생각한다. 말하자면, 참인 진술은 올바르게 주장된 진술이다. 하지만 사용을 통해 설명되는 진술의 의미는 (올바른) 주장문의 의미만이 아니다. 왜냐하면 덤밋은 프레게를 따라 뜻(sense) 뿐만 아니라 어조(tone) 그리고 진술의 호소력(force)을 모두 의미의 요소로 받아들이기 때문이다.[29] 이에 따르면 '김연아는 2010년 동계 올림픽에서 금메달을 땄다'와 같은 참인 진술뿐만 아니라 '김연아는 2010년 동계 올림픽에서 금메달을 땄었는가?'와 같은 진리값을 지니지 않는 의문문 역시 사용을 통해 그 의미가 설명되어야 한다. 그러므로 적어도 이 글의 주제를 다룸에 있어서는 '특성규정하다'라는 표현과 '사용하다' 혹은 '발현하다'는 표현은 다르게 이해되어야 할 것이다. 하지만 이러한 입장은 '특성규정하다'라는 표현을 (적어도 이 글에서) 참인 산술적 진술을 규정할 때만 사용하듯이 '사용하다'라는 표현 역시 같은 방향에서 사용하면 되지 않냐고 반박될 수 있다. 하지만 지금 여기서 우리가 논의하는 문제는 왜 '특성규정하다'를 사용하는게 '명료화하다'는 표현을 사용하는 것 보다 더 좋은 것인가에 있다. 즉, 덤밋은 괴델 정리와 자연수에 관한 주제에 있어 '특성규정하다'는 표현을 즐겨 사용한다. 반면 '명료화하다'는 표현은 거의 찾아 볼 수 없다. 그러므로 '특성규정하다'는 표현을 사용할 경우 덤밋이 어떠한 표현을 특성규정하는 방식에 대해 설명하는 언급만을 고려하면 그의 입장을 이해하는데 오해의 여지가 없을 것이나 '명료화하다'는 표현을 사용할 경우 어떠한 표현의 의미를 사용을 통해

29) 덤밋(1991b), 5장 그리고 덤밋(2006), 3장을 참고하라.

발현하는 경우를 복합적으로 고려함으로써 그의 입장을 오해할 여지가 있다는 것이다. 그러므로 논란의 여지 및 오해를 피하기 위해서라도 ‘특성규정하다’를 사용하는 것이 더 좋을 것이며 ‘특성규정하다’는 표현은 실제로 덤밋이 즐겨 사용하는 표현인 만큼 그의 입장을 이해하는데도 더욱 용이할 것이다.

2) 덤밋의 입장에 대해 오해할 수 있는 것들

괴델 정리에 대한 덤밋의 입장은 그의 글이 지닌 난해함만큼이나 많은 오해를 불러일으킬 수 있다. 그러므로 여기서는 덤밋의 입장에 대해 오해할 수 있는 가능한 사례들을 살펴볼 것이다. 그리고 이러한 과정에서 그의 입장을 이해하는데 ‘특성규정하다’와 ‘완전히 특성규정하다’를 구별할 필요가 있음을 언급할 것이며 그의 입장에 있어 다소 이해하기 힘든 몇 가지 지점을 예비적으로 살펴 볼 것이다. 그리고 1절의 마지막에서 반대논증 III.1.3과 유사하나 덤밋이 직접적으로 제시하지 않은 논증이 제시될 수 있음을 살펴 볼 것이다. 다음은 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 아니라는 덤밋의 입장에 대한 한 해석이다.

‘덤밋의 논점을 거칠게 말하면, 다음과 같다. 덤밋이 옹호하는 버전의 사용의미론에 따르면, 어떤 진술 φ가 참이기 위해서는 φ를 참이라고 간주할 수 있기 위한 어떤 인식적 근거가 있어야 한다. 이제 φ가 어떤 수학적 진술이라고 하자. 그렇다면 수학적 진술을 참이라고 간주할 수 있기 위한 인식적 근거는 무엇인가? 덤밋에 따르면, 우리가 φ를 증명할 수 있다면, φ를 참이라고 간주할 수 있다. 이제 ‘자연수’와 같은 어떤 수학적 표현의 의미를 어떻게 설명할 수 있는지 생각해보자. 사용의미론에 따르면, 우리가 이러한 수학적 표현의 의미를 설명하는 유일한 방법은 이 수학적 표현이 포함된 진술을 참이라고 여길 수 있도록 해주는 원리들 또는 기준들을 제시하는 것이다. 그리고 이 수학적 표현이 포함된 진술을 우리가 증명할 수 있으면, 우리는 이 진술을 참이라고 여길 수 있다. 그런데 괴델 정리는, 어떤 형식체계도 우리가 직관적으로 승인하는 증명 원리들을 모두 구현하는데 성공하지 못한다는 것을 보여준다. 다시 말해서, (파) <u>어떤 형식체계 내에서 성립하는 어떤 원리들에 의해서도 참이라고 여길 수 있는 근거가 없음에도 불구하고, 직관적으로 참인 그런 진술 φ가 존재한다. 이것이 괴델 정리가 사용의미론에 대한 가능한 반례일 수 있는 이유이다.</u> 그리고 사용의미론을 주장하는 덤밋의 입장에서 반드시 답해야 하는 문제이다. 덤밋의 답은 괴델 정리가 자신의 사용의미론이 틀렸음을 보여주지 않는다는 것이다. (하) <u>덤밋에 의하면, 괴델의 증명이 보여주는 것은 우리가 직관적으로 승인하는 증명의 원리들을 딱 한 번에(once for all)</u>

한 특정한 형식체계에 구현할 수 없다는 것이다. 그렇지만 이것은 다른 형식체계들에 의해 계속 확장하여 구현될 수 있다. (갸) 수학적 표현의 사용이 한 특정한 형식체계에 의해 특성규정될 수 있는 경우는 그 표현의 의미가 완벽하게 확정적인 경우이다. 주어진 표현이 내재적으로 모호한 경우에는 그 표현이 포함된 진술을 참이라고 여길 수 있도록 해주는 원리들이 확장된 형식체계에 의해 구현될 수 있다. 그러한 확장된 특성규정도 여전히 사용의 맥락에서 특성규정되는 것이므로 사용의미론에 어긋나지 않는다는 것이 덤밋의 논점이다.'[30](필자의 강조)

제시된 해석은 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 덤밋의 입장을 간결하면서도 그가 주장하려는 핵심을 잘 담고 있다. 다만 간결한 설명 때문에 이를 오해할 여지가 있어 이러한 가능성을 짚고 넘어가려 한다.

필자의 생각에 제시된 위 해석에서 (파), (하) 그리고 (갸)는 덤밋의 의도를 잘 못 이해한 기술로 여겨질 여지가 있다. 먼저 제시된 인용문은 'any'와 'some'을 모두 '어떤'으로 표현해 오해의 여지가 있다. 그러므로 이를 다음과 같이 수정해서 적도록 한다.

'(파) 어떤 형식체계 내에서 성립하는 어떤 원리들에 의해서도 참이라고 여길 수 있는 근거가 없음에도 불구하고, 직관적으로 참인 그런 진술 φ가 존재한다. 이것이 괴델정리가 사용이론에 대한 가능한 반례일 수 있는 이유이다.'

(파') 주어진 단일한 형식체계 내에서 성립하는 어떠한(any) 원리들에 의해서도 참이라고 여길 수 있는 근거가 없음에도 불구하고, 직관적으로 참인 그런 진술 φ가 존재한다. 이것이 괴델 정리가 사용의미론에 대한 가능한 반례일 수 있는 이유이다.

먼저 덤밋은 어떤(some) 진술이 참이라고 여길 근거가 없음에도 참인 그러한 진술이 존재할 수 있다고 여기지는 않을 것이다. 왜냐하면 그는 검증주의 의미론을 주장하고 직관주의를 지지하기 때문인데 이에 대해서는 4장에서 논제

30) 필자는 괴델 정리에 대한 덤밋의 입장을 연구하는 과정에서 익명의 논평자로 부터 이와 같은 논평을 받은 바 있다. 논평은 필자가 간과하고 있었던 측면을 포함해서 필자와 다른 시각으로 덤밋의 입장이 이해될 수 있음을 보여주었다. 그리고 필자는 이러한 논평을 통해 덤밋의 입장에 대해 더욱 자세히 이해할 수 있었으며 특히 4장에서 언급될 개선된 논증을 제시하는데 큰 도움이 되었다는데 감사드린다. 논평자를 알 수 없는 관계로 허가 없이 그의 논평을 싣게 된데 대해 심심한 사과의 말을 전한다.

IV.1.1과 IV.1.2와 함께 다루게 될 것이다. 그리고 (파)나 (파')이 "어떤 진술이 참이라고 여길 근거가 없음에도 직관적으로 참인 진술이 존재함"을 전제한다면 덤밋의 입장에 정면으로 배치되기 때문에 (파)와 (파')은 덤밋의 논변으로 고려될 수 없게 된다. 그러므로 (파)와 (파')에서 말하는 것은 어떤(some) 진술이 "주어진 형식체계 내에서" 참이라고 여길 근거가 없음에도 참인 그러한 진술이 존재한다는 것으로 이해되어야 할 것이다. 흥미로운 것은 2장에서도 언급했듯이 덤밋이 표면적으로 제시한 논증은 반대 논증 II.1.3이며 이에 대한 전제 (2)인 "만약 '자연수'의 의미가 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다면, 사용의미론은 옳지 않다"를 부정하는 것이었다. 즉, 그의 입장은 '자연수'의 의미가 애초에 어떠한(any) 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정될 수 없는 것이기 때문에 완전히 특성규정되고 안되고는 사용의미론이 옳고 말고의 근거가 될 수 없다는 것으로 해석될 수 있다. 그리고 이러한 입장의 주된 근거는 논제 II.1.4를 받아들이는 하에서 '자연수'의 의미가 완전히 명확하지 않다는 것이었다.

논제 II.1.4. 임의의 주어진 수학적 표현 e에 대해, 만약 e의 의미가 어떤(some) 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확(perfectly definite)하다.

만약 (파')이 덤밋이 고려한 사용의미론에 대한 반대논증이었다면 '자연수'의 의미가 애초에 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다거나 '자연수'의 의미가 완전히 명확하지 않다는 그의 주장이 (파')에 대한 반례로 작용해야 한다. (파')에 대한 반박을 제시하려면 "형식체계 P내에서 참이라고 여길 수 있는 근거가 없음에도 직관적으로 참인 진술"이 존재할 수 없음을 보이던가 (파') 자체가 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 입장을 잘 못 이해한 것이라는 설명이 필요하다. 하지만 1963a년도 덤밋의 논문에서 직접적으로 이러한 부분에 대답하려는 시도는 찾기가 쉽지 않다. 그러므로 (파')과 같은 형태의 논증을 재구성해 보는 것도 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 아니라는 덤밋의 입장을 이해하는데 도움이 될 수 있을 것이다. 이에 대해서는 1절

의 마지막에 짧게 언급하고 본격적인 논의는 4장에서 제시될 것이다. 이제 (하)가 잘 못 이해될 수 있는 가능성에 대해 생각해 보자.

'(하) 덤밋에 의하면, 괴델의 증명이 보여주는 것은 우리가 직관적으로 승인하는 증명의 원리들을 딱 한 번에 한 특정한 형식체계에 구현할 수 없다는 것이다. 그렇지만 이것은 다른 형식체계들에 의해 계속 확장하여 구현될 수 있다.'

형식체계 P가 지닌 모든 증명의 원리에 의해서는 참이라고 여길 수 없지만 그럼에도 참인 그런 진술 φ가 존재한다고 가정하자. 여기서 (하)가 언급하는 것은 형식체계 P를 확장하여 진술 φ가 참이라고 할 수 있는 원리를 추가할 경우 확장된 형식체계 $P+$에서는 φ를 참이라고 할 수 있다는 것이다. 다시 말해, 그러한 원리의 확장을 형식체계 $P+$에 의해 특성규정하는 것도 P를 구성하는 산술적 진술들의 사용을 통해 제시하는 것임으로 참인 진술 φ의 의미를 사용에 의해 설명했다고 여길 수 있다는 것이다. 하지만 (하)가 포함하는 '우리가 직관적으로 승인하는 증명의 원리들'이란 표현과 (하)의 마지막 문장은 잘 못 이해될 여지가 있다. 먼저 (하)의 '우리가 직관적으로 승인하는 증명의 원리들'이 (하')처럼 '우리가 직관적으로 승인하는 유한한 증명의 원리들'로 이해되어서는 안 될 것이다.

(하') 덤밋에 의하면, 괴델의 증명이 보여주는 것은 우리가 직관적으로 승인하는 ***유한한*** 증명의 원리들을 딱 한 번에 한 특정한 형식체계에 구현할 수 없다는 것이다. 그렇지만 이것은 다른 형식체계들에 의해 계속 확장하여 구현될 수 있다.

왜냐하면 이 경우 유한한 증명의 원리들은 정도의 차이는 있을 것이나 하나의 단일한 형식체계 P에 의해 특성규정될 수 있을 뿐만 아니라 괴델 증명이 보여주는 바도 아니기 때문이다. 다음으로 (하')의 '유한한'을 '모든'으로 수정한 (하'')을 살펴보자.

(하'') 덤밋에 의하면, 괴델의 증명이 보여주는 것은 우리가 직관적으로 승인하

는 ***모든*** 증명의 원리들을 딱 한 번에 한 특정한 형식체계에 구현할 수 없다는 것이다. 그렇지만 이것은 다른 형식체계들에 의해 계속 확장하여 구현될 수 있다.

이 경우 (하'')은 우리가 직관적으로 승인하는 모든 증명의 원리들이 특정한 단일한 형식체계에서는 완전히 특성규정되지 않으나 이 형식체계를 확장함으로써 완전히 특성규정됨을 주장하는 것으로 잘 못 이해될 수 있다. 만약 (하)가 이런 방향으로 해석된다면 이는 잘못이다. 왜냐하면 모든 증명의 원리들은 형식체계 P를 확장하더라도 완전히 특성규정될 수 없다는 것이 덤밋의 입장이기 때문이다.[31] 또한 이는 그가 ‘증명가능성’의 의미가 본질적으로 비형식적(inherently informal)[32]이라고 여기는 주된 근거이기도 하다. 이제 마지막으로 (갸)를 살펴보자.

‘(갸) 수학적 표현의 사용이 한 특정한 형식체계에 의해 특성규정될 수 있는 경우는 그 표현의 의미가 완벽하게 확정적인 경우이다. 주어진 표현이 내재적으로 모호한 경우에는 그 표현이 포함된 진술을 참이라고 여길 수 있도록 해주는 원리들이 확장된 형식체계에 의해 구현될 수 있다.’

(갸) 역시 잘 못 해석될 수 있다. (갸)의 첫 번째 진술은 논제 II.1.4를 기술한 것인데 이 문장이 오해의 여지가 있는 이유는 표현의 의미가 완전히 명확하지 않더라도 단일한 형식체계 P에 의해서 특성규정은 되기 때문이다.[33] 예를 들

31) 명제 II.1.1을 상기해 보면 덤밋은 ‘자연수’의 의미도 어떠한 형식체계 P에 의해서 완전히 특성규정될 수 없다고 여긴다. 다시 말해, 형식체계 P를 어떻게 확장하던간에 ‘자연수’의 의미는 완전히 특성규정되지 않는다는 것이다.

32) 필자가 아는 하에서 직관주의자들의 저작에서 ‘증명가능성’의 의미를 ‘비형식적’이라고 기술한적은 있어도 ‘본질적으로 비형식적’이라고 기술하는 것은 보지 못했다. 필자가 이 표현을 사용하는 것은 스튜어트 샤피로(1998, p. 614)가 사용한 표현을 그대로 차용한 것이다. 하지만 이 표현은 ‘증명가능성’의 의미가 형식체계에 의해서는 애초에 완전히 특성규정될 수 없다는 것을 잘 표현해 주며 직관주의자들의 입장을 왜곡하는 표현으로 보이지는 않으므로 계속 사용하도록 할 것이다.

33) 실제로 덤밋 역시 ‘수학적 표현의 사용은 단일한 형식체계에 의해 특성규정될 수 있는데 이는 오직 표현의 뜻이 완전히 명확할 때이다'라고 기술하며 ‘완전히 특성규정되다’라는 표현을 사용하지 않는다. 하지만 이는 덤밋의 실수라고 봐야지 덤밋의 입장이라고 보기는 어렵다. 덤밋이 지속적으로 주장하는 것은 ‘자연수’의 의미가 형식체계 P에 의해 “완전히” 특성규정되지 않는 것이지 특성규정 자체가 안 된다고 여기는 것은 아니다.

어, 덤밋은 '자연수'의 의미가 완전히 명확하다고 여기지는 않지만 형식체계 P에 의해서 특성규정이 될 수 있다고 여긴다. 다만, "완전한" 특성규정이 제시되지 않는 것뿐이다. 그리고 (갸)의 마지막 문장이 "'자연수'의 의미가 형식체계 P를 확장함으로써 완전히 특성규정된다"는 입장을 기술하는 것으로 해석되어서는 안 될 것이다. 2장에서 언급했듯이 괴델 정리에 대한 덤밋의 해석은 명제 II.1.1이다. 이 명제에서 '어떠한 형식체계 P'는 괴델 정리가 적용되는 모든 형식체계를 말하므로 주어진 형식체계 P의 모든 확장 역시 포함한다. (갸)의 두 번째 문장을 위와 같이 해석할 경우 이는 덤밋의 괴델 정리에 대한 입장을 잘 못 기술한 것으로 오해될 수 있다.

지금까지 (파), (하), (갸)를 통해 괴델 정리에 대한 덤밋의 입장이 잘 못 이해될 여지에 대해 살펴 보았다. 이제 마지막으로 (파)가 앞서 소개했던 반대논증 II.1.3과 조금 다른 형식으로 재구성될 수 있는 여지에 대해 살펴 보자.

실제로 (파)는 크리스핀 라이트가 1994년도 논문에서 덤밋을 공격하는 입장과 유사해 보인다. 거칠게 설명하자면, 라이트가 덤밋을 공격하는 한 입장은 덤밋이 "만약 P가 일관적이라면 결정불가능한 문장 U_P가 참이다"를 받아들인다고 고려하는 하에서 형식체계 P내에서는 괴델의 두 번째 불완전성 정리에 의해 일관성 증명이 주어질 수 없는데 어떻게 U_P가 참임을 알 수 있냐는 것이었다. 특히 덤밋 역시 그러한 증명이 형식체계 내에서 주어질 수 없을 뿐만 아니라 실제로 유익한(genuinely informative) 증명은 아니라고 인정하는데서 이는 흥미롭다. 하지만 이와 관련된 덤밋의 입장은 이해하기가 쉽지 않을 뿐만 아니라 논의의 여지가 있는 것이 사실이다. 4장에서는 (파)를 덤밋의 입장에 적합하게 재구성하여 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 개선된 반대 논증 IV.1.3을 제시할 것이다. 그리고 덤밋이 개선논증 IV.1.3을 극복하기 위해서는 '의미'가 적용되는 대상들에 대한 명확한 규정을 제시해야 할 것임을 주장할 것이다. 또한 형식체계 P를 기반으로 하는 체계들은 그 자신이 일관적인지에 대해 증명할 수도 인지할 수도 없는 반면 우리는 어떻게 그것이 가능한지에 대해 설명해야 함을 주장할 것이다. 그러므로 (파)가 어떻게 개선논증으로 제시될 수 있는 여지가 있는가에 대해 예비적으로 살펴 보자.

덤밋은 형식체계 P의 일관성 증명과 P에서 증명도 반증도 되지 않으나 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P에 대해 다음과 같이 설명한다.

'(냐) [U_P]가 참임을 입증하기 위한 논증은 형식체계의 일관성을 입증하는 것과 관련이 있다. 괴델 정리와 관련해 흥미로운 측면은 그것의 정수론에 관한 임의의 직관적으로 올바른 체계에 대한 적용가능성이다. (댜) 개별적인 형식체계들에 있어, 우리는 실제로 유익한(genuinely informative) 일관성 증명을 지닐 수 있다. 예를 들어, 체계의 가장 자연스러운 유형에 대해 우리는 겐첸이 ϵ_0까지의 초한귀납을 사용하여 최초로 얻는 것과 같은 종류의 일관성 증명을 지닌다. 괴델의 논증과 함께 일관성 증명으로 부터 [U_P]가 참임이 당연하게 따라 나온다. 하지만, 이는 개별적인 경우에 대한 것으로 인식론적으로 놀랍지 않은 사실로 부터 알 수 있는 결과일 뿐이다. 여기서 인식론적으로 놀랍지 않은 사실이란 개별적인 형식체계가 '자연수' 개념과 관련해 우리가 직관적으로 참이라 인식할 수 있는 모든 것들을 포괄하지 못한다는 사실이다. 예를 들어, 앞서 언급됐듯이 ϵ_0까지의 초한귀납의 타당성이 그렇다. (랴) 하지만 여기서 설명되어야 할 것은 모든 직관적으로 올바른 형식체계에 대한 괴델 정리의 보편적 적용가능성이다. 다시 말해, 어떠한 그러한 체계도 자연수에 관해 우리가 주장하고 싶은 모든 것을 포괄하지는 못한다는 사실이다. 그러므로 임의의 형식체계에 대해 고려할 때 우리가 [U_P]에 참값을 부여할 수 있다고 알고 있음을 입증하려는 것이라면, 우리는 오직 그 체계가 직관적으로 올바름이 가정될 때에만 그러할 것이라는 것과 일관성 증명은 괴델의 논변이 보완되어야 한다는 측면을 고려해야 할 것이다. 물론 일관성 증명의 그러한 보편적 형태가 실제로 유익할 것이라고 기대할 수 없다. (먀) 다만 그러한 것은 사소한 종류의 증명이 될 수 있을 뿐이다. 참인 결론을 지니는 속성에 관한 형식적 증명의 길이에 대한 귀납의 적용에 의해 얻어지는 그러한 증명 말이다.'(필자의 강조)(xxxvii)

덤밋의 위와 같은 언급으로 부터 우리는 적어도 네 가지를 알 수 있다. 첫째, (냐)로부터 그는 U_P가 참임을 입증하는 것과 형식체계 P의 일관성이 관련성이 있음을 인정한다. 둘째, (댜)로부터 그는 만약 일관성 증명이 주어진다면 U_P는 당연히 참이라고 생각함을 알 수 있다. 셋째, (랴)로부터 그는 괴델 정리는 모든 직관적으로 올바른 형식체계 P에 대한 것이며 P에 대한 보편적 형태의 일관성 증명(실제로 유익한 증명)이 제시된다고 기대하지는 않음을 알 수 있다. 마지막으로 그는 (먀)로부터, 형식체계 P에 대한 사소한 종류의 증명은 주어질 수 있다고 여김을 알 수 있다. 조금 더 자세히 살펴보자. (댜)를 바라볼 때, 덤밋은 형식체계 P의 증명이 주어진다면 U_P는 당연히 참이라고 여길

것 같다. 하지만 (냐)와 (랴)를 살펴 볼 때, U_P가 참이기 위해 P의 일관성 증명이 꼭 필요하다는 것인지 조금 애매하다. U_P가 참임의 입증을 위해 형식체계 P의 일관성에 대한 입증이 필요하다면서 (랴)에서는 실제로 유익한 증명을 기대할 수는 없다고 여기기 때문이다. 그렇기에 (랴)와 (먀)에서 제시한 그의 입장은 흥미롭다. 그는 개별적인 하나의 형식체계가 아니라 보편적인 모든 형식체계 P에 대한 실제로 유익한 증명은 제시될 수 없다고 말한다. 그리고 수학적 귀납법을 사용해 사소한 종류의 증명을 제시할 수 있을 뿐이고 이는 실제로 유익한 증명은 아니라고 말한다. 제시한 인용문의 이후에 덤밋(1963a, pp. 194-195)이 제시하는 설명을 고려하면, 그가 말하는 '사소한 종류의 증명'이라는 것은 적절히 정의된 속성(well-defined property)에 대한 수학적 귀납법의 타당성을 이용해 형식체계 P의 건전성을 증명하는 것으로 보인다. 예를 들어, $True_P$라는 속성이 적절히 정의될 때, 이를 P에 수학적 귀납법을 통해 적용하면 수학적 귀납법의 타당성에 의해 P로부터 도출된 모든 산술적 진술들 φ는 $True_P(\varphi)$라는 속성을 지닐 수 있게 된다. 이러한 과정이 마무리 되면 우리는 P에서는 증명되지 않지만 P의 언어에서는 표현되는 산술적 진술 U_P의 속성인 $True_{P+}(U_P)$를 정의할 수 있게 되고 다시 이 속성에 수학적 귀납법을 적용하여 U_P가 참이라는 결론을 얻을 수 있다. 하지만 덤밋에 따르면, 이러한 증명은 수학적 귀납법의 타당성에 기대어 있고 이 타당성은 그 형식체계내에서 증명 가능한 속성들에만 적용된다. 덤밋은 이에 대해 다음과 같이 설명한다.

'(뱌) 형식체계 내에서, 우리는 그 체계 내에서 표현가능한 속성에 관한 귀납의 타당성만을 포용할 수 있다. 체계가 공식화되면, 그것에 대한 지시체에 의해 우리는 그 체계 내에서 표현가능하지 않은 새로운 속성들을 정의할 수 있다. 말하자면, 그 체계에 대한 참인 진술이 되는 것에 대한 속성 말이다. 그러므로 이러한 새로운 속성들에 귀납법을 적용하여 우리는 그 체계 내에서 증명가능하지 않다는 결론에 도달할 수 있다. '34)(xxxviii)

34) 덤밋의 이 인용문을 읽을 때, '어떤 체계 내에서 표현가능한 속성'이 의미하는 바는 '어떤 체계 내에서 증명가능한 진술에 관한 속성'으로 바라 봐야할 것이다. 예를 들어, 덤밋은 U_P를 '체계 내에서 표현가능하나 증명가능하지 않은 진술'이라고 표현한다. 이는 사실상 '형식체

(ㅑ)에서 덤밋은 ‘우리는 그 체계 내에서 표현가능한 속성에 관한 귀납의 타당성만을 포용할 수 있다’고 말한다. 다시 말해, 귀납의 타당성에 기대어 어떤 속성을 형식체계 P에서 증명가능한 진술들에 부여한다면 이 속성은 형식체계 P 내에서 증명가능한 진술들에 관한 속성이어야 한다는 것으로 보인다. 예를 들어, 형식체계 P에서 증명가능한 진술들에 부여할 속성 $True_P$를 P에서 증명도 반증도 되지 않는 진술 U_P에 귀납을 통해 적용하는 것은 타당하지 않은 귀납법의 적용이라고 고려하는 게 덤밋의 입장으로 보인다는 것이다. 이 경우, U_P에 참인 속성을 타당한 귀납법을 통해 부여하기 위해서는 U_P에 관한 속성을 정의할 수 있는 확장된 형식체계 $P+$에서 $True_{P+}$를 정의해야 한다는 것으로 보인다. 그런데 이 지점이 상당히 흥미롭다. 왜냐하면 덤밋은 U_P를 참으로 인식되는 진술로 여기기 때문이다. 이 경우 U_P는 참으로 인식됨에도 참이란 속성은 형식체계 P에서 정의될 수 없다. 그러므로 ‘U_P는 형식체계 P에 의해서 사용될 수 있는가?’라는 물음이 가능하다. 만약 덤밋이 의미 없는 진술도 참일 수 있다는 주장을 하는 것이 아니라면, 덤밋은 U_P를 참으로 인식되는 진술로 여기기에 U_P가 의미를 지닌다는 데도 동의할 것 같다. 하지만 U_P는 형식체계 P에서 증명도 반증도 되지 않는다. 그리고 이러한 사실은 U_P가 형식체계 P에 의해서 사용될 수 없다는 사실을 방증하는 것처럼 보인다. 만약 이러한 설명이 옳다면 이는 덤밋의 논제 II.3.2에 위배된다. 그러므로 참으로 인

계 P의 언어에서 표현가능하나 형식체계 P로부터 증명도 반증도 되지 않는 산술적 진술 U_P’를 언급하는 것으로 생각할 수 있다. 만약 그가 ‘어떤 체계의 언어에서 증명가능한 진술에 관한 속성’이 아닌 ‘어떤 체계의 언어에서 표현가능한 진술에 관한 속성’으로 ‘체계 내에서 표현가능한 속성’을 사용한다면, ‘체계가 공식화되면, 그것에 대한 지시체에 의해 우리는 그 체계 내에서 표현가능하지 않은 새로운 속성들을 정의할 수 있다’가 묘사하는 속성은 U_P에 관한 속성일 수 없을 것이다. 왜냐하면 덤밋은 U_P가 체계 내에서 증명도 반증도 되지 않으나 ‘체계 내에서 표현가능한 진술’이라고 묘사하기 때문이며 사실상 괴델 정리 증명에 의해 U_P에 관한 속성들은 체계 내에서 표현가능하지 않을 수 없기 때문이다. 더 나아가, 형식체계 P의 언어에서는 P를 확장한 $P+$에 대한 U_{P+}또한 표현가능하다. 그러므로 이러한 설명이 옳다면 두 표현이 같은 의미로 고려될 경우 U_P, U_{P+}, U_{P++} 등에 관한 속성들도 모두 체계 내에서 표현가능하거나 하지 않게 되는 모순적인 상황에 직면하게 된다. 그러므로 ‘어떤 체계 내에서 표현가능한 속성’은 ‘어떤 체계의 언어에서 표현가능한 진술’에 관한 속성으로 이해되어야 할 것이다.

식되나 형식체계 P에 의해 증명도 반증도 되지 않는 산술적 진술 U_P의 존재는 사용의미론의 반례가 될 수 있어 보인다. 하지만 이러한 논변에 대한 덤밋의 입장은 찾아보기 힘들다. 그러므로 만약 앞서 고려된 (파)가 이러한 방향에서 보다 개선되어 제시된다면 이에 대해 덤밋이 대답을 할 수 있느냐 없느냐에 따라 괴델 정리가 덤밋의 사용의미론에 반례가 되느냐 아니냐에 대한 대답이 달라질 수 있을 것이다. 이러한 문제에 대한 보다 자세한 논의는 4장에서 제시될 것이다.

지금까지 필자는 왜 '특성규정하다'라는 용어를 사용해 덤밋의 입장을 살펴 볼 것인지 그리고 '완전히 특성규정하다'와 '특성규정하다'가 왜 구별되어야 되는지에 대해 살펴보았다. 또한 덤밋의 입장에 대해 오해할 수 있는 지점에 대해서도 언급했으며 그 과정에서 덤밋이 제시한 반대 논증 II.1.3 이외에 괴델 정리가 실제로 덤밋의 사용의미론의 반례인지를 살펴 볼 여지를 주는 다른 논증이 구성될 수 있음도 살펴보았다. 개선된 논증은 4장에서 제시될 것이고 또한 평가될 것이다. 하지만 그러한 논의로 가기 전에 조금 더 살펴 볼 것이 있다. 예를 들어, 3장의 시작에서 언급했듯이 ''자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다는 결론을 얻기 위해서는 무엇이 충족되어야 하는지에 대해 알아야 덤밋의 입장에 대한 보다 분명한 평가가 가능할 것이다. 이어지는 2절에서는 이에 대해 알아 볼 것이다.

2. '자연수'의 의미에 대한 완전한 특성규정을 얻으려면?

이 절에서는 "'자연수'의 의미가 완전히 특성규정되는가?"에 대한 덤밋의 입장을 이해하기 위한 예비적인 논의를 진행할 것이다. 주된 물음은 "덤밋은 '자연수'의 의미가 형식체계 이외의 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는가?"에 대한 것이다. 그리고 이에 대한 대답을 제시하기 위해서는 "'자연수'의 의미에 관한 가장 적합한 특성규정 방식은 형식체계 P에 의한 방식이다"(전제 III.2.3)를 덤밋이 어떻게 받아들이느냐에 달려있음을 논할 것이다.

필자의 이해가 옳다면 덤밋은 '자연수'가 그리고 괴델 정리가 사용의

미론의 반례가 아님을 주장하기 위해 ‘자연수’의 의미가 형식체계 P에 의해서 뿐만 아니라 다른 방식에 의해서도 애초에 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는 것 같다. 왜냐하면 덤밋은 다음과 같은 언급을 하기 때문이다.

‘'자연수' 표현에 익숙한 사람들은 그것의 의미를 완전히 확실하게 직관적으로 이해한다. 하지만 (샤) 이 표현의 사용에 관한 우리의 어떠한 설명— 혹은 가능한 설명 —도 그 표현이 그러한 의미를 어떻게 가질 수 있는지에 대해서는 완전히 설명할 수 없다.’(xxxix)

‘우리 모두는 '자연수' 개념을 가진다. 하지만 (야) 산술적 진술에 대한 우리의 어떠한 유한한 기술도 이 개념에 대한 우리의 소유에 대해 완전히 설명하지 않는다. 그리고 이는 그 개념에 대한 우리의 직관적인 이해에 호소하여 우리가 항상 참인 진술을 인식할 수 있다는 사실을 보여준다. 그러한 참값이 그러한 진술들의 사용에 대한 기술로부터 도출되지 않더라도 말이다.’(xl)

(샤)와 (야)는 덤밋이 괴델 정리가 사용의미론의 반례로 고려되어서는 안 됨을 설명하면서 제시된 것이다. 2장에서 언급했듯이 덤밋은 ‘자연수’의 의미에 대한 특성규정은 자연수에 관한 진술들을 상술하는 것이라 여긴다. 그러므로 (샤)에서 ‘[‘자연수’]의 사용에 관한 우리의 어떠한 설명’이라고 표현한 것과 (야)에서 ‘산술적 진술에 관한 우리의 어떠한 유한한 기술’로 표현한 것은 ‘자연수’의 의미를 특성규정하는 것이라고 해석될 수 있다. 또한 만약 그가 (샤)와 (야)에서의 ‘완전히 설명될 수 없다’는 표현들을 형식체계 P에 의한 특성규정으로 제한하지 않은 경우를 생각해 보자.

(샤') ‘자연수’ 표현의 사용에 관한 우리의 어떠한 설명- 혹은 가능한 설명 -도 그 표현이 그러한 의미를 어떻게 가질 수 있는지에 대해서는 완전히 설명할 수 없다.

(야') 산술적 진술에 대한 우리의 어떠한 유한한 기술도 ‘자연수’의 의미에 대한 우리의 소유에 대해 완전히 설명하지 않는다.

이 경우, '자연수'의 의미에 대한 완전한 설명을 제시할 방법이 형식체계 P로 제한되는 것은 아니기 때문에 '자연수'의 의미가 형식체계 P 이외의 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다는 해석이 가능하다. 그러므로 덤밋의 입장은 '자연수'의 의미가 형식체계 P이외의 다른 방법에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다는 입장으로 해석될 여지가 생기는 것이다.

또한 덤밋은 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능하다고 여긴다. 그는 '무한정 확장가능성'[35)]을 다음과 같이 규정한다.

'개념에 대한 임의의 한정적인 특성규정에 대하여, 어떤 개념이 무한정 확장가능하다는 것은 이러한 특성규정에 더욱 포괄적인 개념을 산출하는 자연스러운 확장이 존재할 경우이다.'[(xli)]

이 글에서는 '개념' 대신 '의미'를 더 선호하므로 이를 아래와 같이 덤밋의 논제 III.2.1로 제시한다.

논제 III.2.1. 임의의 주어진 (수학적) 표현 e와 e의 의미에 대한 한정적(definite) 특성규정 C에 대해, e의 의미가 무한정 확장가능하다. iff C에 의해 특성규정되지 않는 더욱 포괄적인 의미를 산출하는 자연스러운 확장이 존재한다.

---

35) 여기서 '무한정 확장가능성'은 'indefinitely extensible'에 대한 정인교(2009a와 2009b)의 번역을 따른 것이다. 덤밋이 사용하는 'indefinite'을 '한정적이지 않은' 혹은 '무한정한'으로만 번역하는 것은 문제가 있다는 지적이 있을 수 있다. 예를 들어, 'indefinitely extensible'이란 표현이 모든 자연수들에 대한 확정적 전체(definite totality)가 완전히 특성규정되지 않음을 설명할 때에는 '무한정 확장가능한'으로 번역하는 것이 적합할 수 있지만 '자연수'의 의미에 대한 우리들의 이해를 언급할 때는, 우리가 완전히 명확한(perfectly definite) 이해를 하지 못한다는 방향에서 'indefinite'을 '불명확한' 혹은 '명확하지 않은'으로 번역하는 것이 더욱 올바를 것이다. 하지만 이러한 문제는 '자연수'의 의미를 특성규정할 경우와 '자연수'의 의미에 대한 우리의 이해를 구별해 고려함으로써 해결될 수 있는 사소한 문제로 보인다. 그러므로 이 글에서는 'indefinite'을 '자연수'의 의미를 특성규정하는 경우에는 '한정적이지 않은' 혹은 '무한정한'이란 표현을 사용하고 '자연수'의 의미에 관한 우리의 이해에 대한 언급일 경우에는 '명확하지 않은'과 같은 표현을 사용할 것이다.

그의 규정을 따르자면 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능하다는 것은 그것이 완전히 특성규정되지 않음을 말하는 것과 같아 보인다. 왜냐하면 ‘자연수’의 의미에 관한 어떠한 한정적 특성규정을 제시하더라도 그 특성규정에 포함되지 않은 자연스러운 확장이 존재할 것이기 때문이다. 다시 말해, 이는 ‘자연수’의 의미에 대해 특성규정되지 않은 확장이 항상 존재한다는 것이므로 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능하다면 그것은 완전히 특성규정되지 않는다는 것으로 이해될 수 있다. 그리고 만약 여기서의 ‘특성규정’이 형식체계 P에 의한 특성규정만을 고려하지 않는것이라면 덤밋은 ‘자연수’의 의미가 형식체계 P이외의 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다고 여긴다는 해석이 가능하다. 그렇다면 ‘자연수’의 의미는 실제로 완전히 특성규정되지 않는가? 만약 ‘자연수’의 의미에 대한 완전한 특성규정이 순수히 산술적인 진술들을 얻는 모든 증명의 원리들에 대한 특성규정을 포함한다면, 덤밋의 입장을 이해하는 것만으로는 부족할 것이다. 예를 들어, 골드바흐 가설(Goldbach Conjecture)과 같이 아직 증명되지 않아 참인지 거짓인지 혹은 증명도 반증도 될 수 없는지를 알 수 없는 산술적 진술은 여러 가지 해석을 가능하게 한다. 골드바흐 가설이 증명도 반증도 될 수 없다고 여기는 사람은 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정될 수 없음을 보여주는 예라고 여길 것이다. 하지만 골드바흐 가설이 참이거나 거짓이라고 믿는 사람들은 이것이 언젠가는 증명되거나 반증될 것임을 믿을 수 있다. 그리고 이와 마찬가지로 모든 자연수에 관한 순수히 산술적인 진술들 역시 참이거나 거짓으로 증명될 것이므로 산술적 참을 얻는 모든 증명의 원리들은 앞으로 완전히 특성규정될 것이며 그렇기에 ‘자연수’의 의미는 완전히 특성규정될 것이라는 입장이 가능하다. 이러한 각자의 입장들은 “산술적 참을 얻는 증명의 원리”가 무엇인지에 대한 적절한 논의 없이는 제대로 대답되기 힘들 것이다. 하지만 안타깝게도 그 “증명의 원리”에 대한 논의 필자의 역량을 넘어선다. 그러므로 2절에서는 덤밋이 “‘자연수’의 의미가 형식체계 P 이외의 방법에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다”는 입장을 지니기 위해 설명되어야 할 것이 무엇인가에 대해 집중할 것이다. 그리고 이에 대한 덤밋의 입장을 알기 위해 ‘형식화’ 혹은 ‘형식체계에 의한 특성규정’을 그가 어떻게 이해하는지 알 필요가 있음에 대해 설명할 것이다.

덤밋이 “형식체계 P에 의한 특성규정”을 어떻게 고려하는가를 알아보기 위해서는 ‘증명가능성’에 대한 그의 입장을 살펴보는 것이 도움이 될 것이다. 왜냐하면 덤밋은 직관주의자들이 그렇듯 ‘증명가능성’의 의미가 본질적으로 “비형식적”(inherently informal)이라고 여기는 것으로 보이기 때문이다. ‘증명가능성’에 대한 그의 입장은 다음과 같은 그의 언급을 통해서도 고려될 수 있다.

‘... 정확한 개념이 종종 막연히(vague) 직관적인 개념을 대신할 수 없듯이 형식체계가 직관적인 증명들을 *대신*하지 못한다고 말할 수 있다. 형식체계는 과거에 그러했듯이 직관적인 이해에 대해 설명해야 할 부분을 남기고 있다. 그리고 그것은 직관적인 개념(idea)을 설명하지 못하는 것과 같은 탐탁치않은 모습을 보이지 않을 경우에만 우리의 흥미를 끈다. (쟈) 괴델 정리가 그러한 예일 것이다. 괴델 정리는 단일한 형식체계에서의 증명가능성은 산술적 진리에 관한 직관적인 개념(idea)을 완전히 교체할 의무를 다 할 수 없음을 보여준다.’(필자의 강조)(xlii)

‘타당한 수학적 증명에 대한 직관적인 이해는 심지어 어떤 제한된 이론에서의 진술들에 대한 것까지도 어떤 하나의 형식체계 내에서의 증명 개념과 일반적으로 동일시 될 수 없다. 이는 (챠) 어떠한 형식체계도 우리가 직관적으로 받아들이는 증명의 모든 원리들을 포섭하는데 성공할 수 없는 것이 사실일 수 있기 때문이다. 그리고 (캬) 이는 정수론을 고려할 때, 괴델 정리에 의해 정확히 보여지는 바이다. 이 경우, 우리가 보았듯이 이는 직관적으로 수용가능한 증명들의 집합(class)이 무한정 확장가능함을 의미한다.’(필자의 강조)(xliii)

(쟈), (챠) 그리고 (캬)는 덤밋의 괴델 정리에 대한 또 다른 한 해석이다. 그는 괴델 정리의 직관주의적 의의를 “단일한 형식체계에 의해 ‘증명가능성’(provability)의 의미에 대한 우리의 직관적인 이해가 완전히 특성규정될 수 없다”고 해석한다. 물론 1963a년도 저작에서 그는 이러한 해석을 ‘사실일 수 있다’('it may be the case')는 표현을 사용해 다소 약하게 주장하나 그가 괴델 정리의 직관주의적 의의를 이러한 방향에서 이해함은 의심할 여지가 없어 보인다. 그러므로 이를 다음과 같은 명제로 이를 제시한다.

명제 III.2.2. 어떠한 형식체계 P에 의해서도 ‘증명가능성’의 의미는 완전히 특성규정될 수 없다.[36)]

‘증명가능성’의 의미를 순수히 산술적인 진술들 간의 증명가능성으로 제한해서 이해할 때, 덤밋은 괴델 정리를 통해 명제 III.2.2를 얻을 수 있는 것처럼 얘기한다. 문제는 명제 II.1.1과 III.2.2가 말하는 바가 “어떠한 형식체계 P”에 의해서도 ‘자연수’의 의미와 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정되지 않는 다는 것이지 그 이외의 방법에 의해서도 안 되는 것인지 알 수 없다는 것이다. 앞서 언급된 인용문 (캬)에서 덤밋은 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정될 수 없음을 ‘정수론을 고려할 때, 괴델 정리에 의해 정확히 보여지는 바’로 기술한다. 엄밀히 말해, 괴델 정리에 의해 보여지는 것은 “하나의 단일한 형식체계 P에 의해”서 참으로 인식됨에도 증명도 반증도 되지 않는 순수한 산술적 진술 U_P가 존재함을 보인 것이다. 즉, 만약 덤밋의 (캬)에 대한 언급을 곧이곧대로 받아들일 경우 그는 괴델 정리가 정수론 내에서 증명도 반증도 되지 않는 순수한 산술적 진술이 존재함을 증명한 것이라 받아들인다는 해석이 가능하다. 하지만 덤밋이 실제로 그렇게 이해했다고 무작정 단정하기는 힘들 것이다. 그러므로, 그가 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다고 여겼다면 어떠한 근거에서 그러한 결론에 도달했는지에 대한 괴델 정리 이외의 단서가 필요하다.

필자의 생각에 명제 II.1.1과 III.2.2로 부터 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다고 주장하기 위해서는 다음과 같은 전제가 받아들여져야 한다.

전제 III.2.3. ‘자연수’의 의미에 관한 가장 적합한 특성규정 방식은 형식체계 P에 의한 방식이다.[37)]

36) 앞서 3장 1절에서 설명했듯이 괴델 정리와 관련된 이슈를 고려함에 있어 우리가 고려할 산술적 진술은 “순수하게 산술적인 진술들”이다. 마찬가지로 ‘증명가능성’에 대한 우리의 직관적인 이해는 산술적 진술 이외의 진술과도 관련될 것이나 특별한 언급이 없다면 이 글에서는 순수하게 산술적인 진술들에 관한 증명가능성을 고려할 것이다.

37) ‘가장 적합한 설명 방식’에 대한 규정이 쉽지는 않을 것이다. 여기서는 거칠게나마 어떤 표현의 의미가 가장 적합한 특성규정 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다면 그 이외

문제는 여기서 시작된다. 전제 III.2.3을 받아들인다면, ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미가 형식체계 P 이외의 방법에 의해서도 완전히 특성규정되지 않음을 받아들일 수 있게 된다. 왜냐하면, 가장 적합한 특성규정 방식이 형식체계 P에 의한 것이니 형식체계 P에 의해 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다면 다른 방식에 의해서도 마찬가지일 것이기 때문이다. 직관주의를 옹호하는 그가 이를 받아들일지는 의문스러우나 이 경우 반대논증 II.1.3의 전제 (2)를 극복하는데는 큰 문제가 없을 것이다. 그리고 이 문제를 차치하고 전제 III.2.3을 받아들이지 않되 형식체계 P 이외의 다른 방법에 의해서도 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정되지 않음을 보이려면 덤밋은 그 방법이 무엇인지 설명해야할 의무를 짊어지게 된다.[38] 말하자면, 만약 덤밋이 전제 III.2.3을 받아들이는 경우를 배제한다면 그에게는 두 가지 선택지가 남는다. 하나는 (타) 전제 III.2.3을 받아들이지 않은 상태에서 형식체계 P 이외의 방법에 의해서도 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정되지 않음을 보이는 것이다. 그리고 다른 하나는, (파) ‘자연수’의 의미가 형식체계 P에 의해서 완전히 특성규정되지 않을 뿐이지 다른 방식에 의해서는 완전히 특성규정 될 수 있는 가능성을 열어두는 것이다.

전제 III.2.3을 받아들이는 경우	‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다.
전제 III.2.3을 받아들이지 않는 경우	(타) ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미가 형식체계 P 이외의 방법에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다.
	(파) ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미가 형식체계 P에 의해서 완전히 특성규정되지 않을 뿐이지 다른 방식에 의해서는 완전히 특성규정 될 수 있다.

의 방식에 의해서도 그 표현의 의미는 완전히 특성규정되지 않는 그러한 방식으로 고려할 것이다. 전제 III.2.5에서 이에 대해 조금 더 자세히 고려할 것이다.

38) 이 글에서 덤밋이 전제 III.2.3을 받아들이는 경우를 차치한다는 것이 그가 이를 받아들이지 않는다고 주장한 것은 아니다. 그가 전제 III.2.3을 받아들이느냐 마느냐의 문제는 ‘형식체계 P에 의한 특성규정’을 어떻게 규정하느냐에 따라 그 평가가 달라질 수 있다. 그러므로 이에 대한 평가는 이 글에서 유보하도록 할 것이다. 하지만 전제 III.2.3을 받아들인다면 덤밋이 반대논증 II.1.3을 극복하는데 문제가 없다는 것은 분명할 것이다.

첫번째 (ㅑ) 경우에 대한 덤밋의 직접적인 설명은 찾기가 어렵다. 그리고 두 번째 (ㅒ) 경우는 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미가 무한정 확장가능하다는 그의 입장과 상충될 우려가 있다. 왜냐하면 앞서 우리가 고려한 논제 II.1.4에 의해 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능하다면 ‘자연수’의 의미는 완전히 명확하지 않고 그러므로 (형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정되지 않기 때문이다.

논제 II.1.4. 임의의 주어진 수학적 표현 e에 대해, 만약 e의 의미가 어떤 (some) 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확(perfectly definite)하다.

물론 논제 II.1.4는 형식체계 P에 의한 특성규정으로 제한하고 있으니 ‘자연수’의 의미가 완전히 명확하지 않다고(무한정 확장가능하다고) 하더라도 문제가 될 것 없지 않느냐고 반문할 수도 있다. 하지만 우리가 여기서 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되느냐 되지않느냐를 고려하고 있는 이유는 반대 논증 II.1.3의 전제 (2)를 실제로 덤밋이 극복할 수 있냐를 살펴보기 위해서였다.

(2) 만약 ‘자연수’의 의미가 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다면, 사용의미론은 옳지 않다.

다시 말해, 덤밋이 ‘자연수’의 의미가 형식체계 P 이외의 방식에 의해 완전히 특성규정될 여지를 남겨주게 된다면, 반대 논증의 전제 (2)를 부정할 근거를 잃게 된다. 그리고 그러한 완전한 특성규정이 어떻게 주어질 수 있는지에 대해 설명해야 하며 그것이 형식체계 P에 의한 특성규정과 어떠한 차이가 있는지를 설명해야 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 아님을 설명할 수 있게 되는 것이다. 하지만 이러한 설명을 덤밋은 제시하지 않았거니와 제시하기도 힘들 것으로 보인다. 그렇다면 덤밋이 취해야 할 것은 다시 첫 번째 선택지인 (ㅑ)로 돌아가는 것이다. 즉, 전제 III.2.3을 받아들이지 않은 상태에서 형식체계 P 이외의 방법에 의해서도 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정되

지 않음을 보이는 것이다. 이를 보이기 위해서는 논제 II.1.4를 다음과 같이 수정하여 받아들일 필요가 있다.

전제 III.2.4. 임의의 주어진 수학적 표현 e와 형식체계 P 보다 더 적합한 특성규정 방식 M에 대해, 만약 e의 의미가 M에 의해서 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확하다.

여기서 "형식체계 P 보다 더 적합한 특성규정 방식 M"은, 최소한 M에 의해서 어떤 표현의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다면 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는 그러한 방법이어야 할 것이다. 또한 M에 의한 특성규정이 P가 사용하는 것 보다 모호한 표현을 사용해서는 안 될 것이다. 그러므로 임시적으로 나마 다음과 같은 전제를 통해 '더 적합한 특성규정 방식'을 규정한다.

전제 III.2.5. 임의의 주어진 수학적 표현 e와 특성규정 방식 M_1, M_2에 대해, M_2가 M_1보다 e의 의미를 특성규정하는데 더 "적합한 방식"이라는 것은 i) e의 의미에 대한 M_2의 특성규정이 M_1에 의한 특성규정 보다 e의 의미에 대해 더 명시적(explicit) 설명을 제공하며 ii) 만약 M_2에 의해 e의 의미가 완전히 특성규정되지 않으면 M_1에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다는 말이다.

만약 전제 III.2.4가 옳으며 전제 III.2.5의 정의가 통용될 수 있다면, '자연수'의 의미가 무한정 확장가능해서 완전히 명확하지 않을 경우 '자연수'의 의미는 어떠한 M에 의해서도 완전히 특성규정되지 않을 것이다. 그러므로 형식체계 P 이외의 방법에 의해서도 '자연수'와 '증명가능성'의 의미가 완전히 특성규정되지 않음을 보이기 위해서는 적어도 두 가지가 고려되어야 한다. 먼저 전제 III.2.4와 III.2.5를 받아들일 때, 첫째로 '자연수'와 '증명가능성'의 의미가 무한정 확장가능해서 완전히 명확하지 않아야 한다. 둘째, 형식체계 P에 의한 특성규정 방식과 P 보다 적합한 특성규정 방식 M에 의한 특성규정 방식이 서

로 구별될 수 있는지에 대한 논의가 필요하다. 왜냐하면 만약 덤밋이 ‘자연수’의 의미나 ‘증명가능성’의 의미가 형식체계 P 이외의 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않음을 주장한다면 그것은 완전한 *형식화* 자체가 되지 않는다는 주장일 것이기 때문이다. 만약 P가 아닌 더 적합한 다른 형식체계에 의해 ‘자연수’의 의미가 완전히 형식화된다면 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 덤밋의 입장은 재고될 여지가 있고 이는 덤밋이 받아들여서는 안 되는 (퍄)의 경우이다. 이 부분에 대한 보다 자세한 대답을 제시하기 위해서는 덤밋이 ‘형식화’ 혹은 ‘형식체계에 의한 특성규정’을 어떻게 고려했는지에 대한 설명이 필요할 것이다. 그러므로 다음 3절에서는 이 문제에 대해 조금 더 자세히 알아보자.

3. 형식화 혹은 형식체계에 의한 특성규정

덤밋이 반대논증 II.1.3을 극복하는 방식은 이 논증의 전제 (2)인 “만약 ‘자연수’의 의미가 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다면, 사용의미론은 옳지 않다”를 부정하는 것이었다. 그리고 이것을 부정하기 위해, 그는 ‘자연수’의 의미는 애초에 형식체계 P에 의해서 뿐만 아니라 그 이외의 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는 듯하다. 즉, 사용의미론이 옳으냐 그르냐는 것은 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되냐 되지 않느냐와는 무관하다는 것이다. 그리고 이에 대한 평가를 위해 필자는 앞서 전제 III.2.4를 제시했고 여기서 임의의 “형식체계 P 보다 적합한 특성규정 방식 M”에 의해서도 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되지 않을 경우 ‘자연수’의 의미는 애초에 어떠한 방식에 의해서도 완전히 특성규정될 수 없다는 결론에 이를 수 있을 것이라고 언급했다. 그리고 여기서 필자가 주목하는 문제는 “형식체계 P 보다 적합한 특성규정 방식 M”은 형식체계가 아닐 수 있느냐는 것이다. 왜냐하면 덤밋이 “‘자연수’의 의미가 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정되지 않는다”고 언급할 때 그가 의도하는 바는 “‘자연수’의 의미가 완전히 형식화되지 않는다”라고 고려되기 때문이다. 만약 덤밋이 언급하는 ‘형식화’의 의미가 형식체계 P에 의한 특성규정 이외의 방식을 포함한다면 괴델 정리가

적용되지 않는 형식화 방식이 제시됨으로 인해서 괴델 정리는 “‘자연수’의 의미가 완전히 형식화되지 않는다”는 입장의 근거로 고려될 수 없을 수 있다. 또한 이 경우 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 입장마저도 의심될 수 있을 것이다. 그러므로 이어지는 글에서는 형식체계 P에 의해 정의되지 않는 함수 혹은 식을 지닌 형식체계가 존재하더라도 그것이 “‘자연수’의 의미를 완전히 특성규정하기 위한 형식체계”라면 형식체계 P를 포함해야 할 것이며 이 경우 괴델 정리가 적용될 것이므로 그 형식체계에 의해서는 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정될 수 없을 것이라는 설명이 이어질 것이다. 다시 말해, ‘자연수’의 의미를 완전히 특성규정하기 위한 형식체계가 M이라면 이는 형식체계 P와 구별될 수 없을 것이란 말이다.

‘형식화’에 대한 덤밋의 직접적인 입장은 ‘증명가능성’의 의미에 대한 그의 입장으로 부터 알 수 있다. 그는 직관주의를 옹호하며 ‘증명가능성’의 의미는 본질적으로 비형식적이라는 입장을 따른다고 알려져 있기 때문이다. 그리고 앞서 언급했듯이 ‘자연수’의 의미에 관한 특성규정은 순수히 산술적인 진술들 간의 증명가능성에 관한 특성규정 역시 포괄할 것이다. 그러므로 ‘증명가능성’의 의미에 관한 덤밋의 입장을 살핌으로써 ‘자연수’의 의미를 형식체계에 의해 특성규정하는 것에 대한 그의 입장을 살펴 볼 수 있고 또한 그가 ‘형식화’의 의미를 어떻게 받아들이는지도 살펴 볼 수 있을 것이다.

먼저, ‘자연수’의 의미를 특성규정할 때, 덤밋은 참인 순수히 산술적인 진술들을 얻는 증명의 원리에 대한 특성규정 역시 포함할 것이다. 앞서 언급했듯이 덤밋은 ‘자연수’의 의미에 대한 특성규정은 ‘우리가 주장하도록 준비된 산술적 진술과 우리가 받아들이도록 준비된 산수에서의 추론 형식에 대해 상술함으로써 제시된다’(xliv)고 여긴다. 그리고 참인 순수히 산술적인 진술들을 얻는 증명의 원리라는 것은 그러한 진술들이 어떤 전제로 부터 어떤 논리규칙에 의해 도출되는가에 대한 추론 원리라고 바라 볼 수 있을 것이다. 그리고 이러한 추론 원리에 대한 특성규정은 어떤 전제로부터 어떤 결론이 도출가능함에 대한 특성규정을 포괄할 것이고 이러한 도출가능성을 보이는 것은 그러한 진술들 간의 증명가능성을 보이는 것이기 때문이다.

‘증명가능성’의 의미가 완전히 형식화(특성규정)되지 않음은 그의

1959년 저작 “비트겐슈타인의 수리철학”(Wittgenstein's Philosophy of Mathematics)과 1963a년도 논문인 “괴델 정리의 철학적 의의”에서 주장된다. 그리고 이러한 주장의 근간으로 그는 후기 비트겐슈타인(Ludwig Wittgenstein)의 입장과 브라우어(L. E. J. Brouwer)의 직관주의 입장 일부를 채택한다. 그러므로 비트겐슈타인과 브라우어의 형식화에 대한 입장을 덤밋이 어떻게 받아들이는지를 이해해 봄으로써 그의 형식화에 대한 태도를 알아 볼 수 있을 것이다.

형식화 작업 혹은 형식체계에 대한 비트겐슈타인과 직관주의자들의 입장을 옹호하는 덤밋의 언급은 다음과 같다.

‘[비트겐슈타인]은 직관주의자와 같이 수학적 증명들에 사용된 논증의 가능한 형식들의 한계를 미리 정할 수는 없다고 주장하길 원한다. 게다가, (햐) 정확한 개념이 종종 막연히(vague) 직관적인 개념을 대신할 수 없듯이 형식체계가 직관적인 증명들을 대신하지 못한다고 말할 수 있다.’(필자의 강조)(xlv)

‘... (거) 수학적 증명 혹은 구성이 본질적으로 심적 실체라는 입장은 종이 위에 기호들의 나열을 통해 제시될 수 있을지라도 동일시 될 수는 없다. 이 논제는 우리가 해석을 제시하는 기호들에 대해 아무런 설명도 제시하지 않는 피상적인 형식주의에 대해 단순히 항의만하는 것은 아니다. 이는 어떤 수학적 이론 내에서 진술들에 대한 가능한 증명들의 전체와 기호로 이루어진 구조들에 대해 확정적으로 상술된 임의의 전체들이 심지어 동형일 수 있다는 생각에 대한 거부이다. 다시 말해, 임의의 형식체계 내에서의 증명들과의 동형이 제시될 수 있다는 생각에 대한 거부라는 말이다. 이런 문제에 대한 직관주의자들의 생각은 당연히 '심리주의'에 대한 그리고 논리나 수학에 철저히 심리학적 개념들을 도입하는 것에 대한 프레게의 비판을 이해한 이들의 입장과 일치하지 않는다. 하지만 직관주의자들에게서 심리주의적 가장을 벗길 때, 그들의 이해는 전적으로 옳은 것으로 인식될 수 있다.’(필자의 강조)(xlvi)

두 번째 인용문을 보면 덤밋은 (거)의 첫 문장을 직관주의자들의 논제로 고려하되 심리주의적 가장을 벗길 때, 이 논제는 받아들일만한 것으로 여긴다.[39)]

---

39) 실제로 ‘증명가능성’의 의미를 특성규정할 때, 형식체계 P의 사용이 필수적이라면 괴델 정리가 적용될 가능성을 배제할 수 없을 것이다. 그리고 이러한 방향에서 바라 볼 때, 괴델 정리에 대한 덤밋의 한 해석인 명제 III.2.2는 직관주의자들의 논제와 유사한 결과임을 알 수

흥미로운 것은 덤밋은 이를 “피상적인 형식주의”에 대한 비판으로 바라본다는 것이다. 아마도 덤밋은 형식체계를 사용하여 어떤 표현의 의미를 설명하는 방식 혹은 형식화하는 방식에 대한 직관주의자들의 비판이 피상적인 형식주의에 대한 비판과 일치한다고 여긴 듯하다.[40] 그러므로 피상적인 형식주의에 대한 덤밋의 비판을 살펴봄으로써 ‘형식화’의 의미를 어떻게 바라보는지를 알아 볼 수 있을 것이다.

덤밋은 ‘피상적 형식주의’를 ‘우리가 해석을 제시하는 기호들에 대해 아무런 설명도 제시하지 않는’ 입장으로 설명한다. ‘자연수’의 의미나 ‘증명가능성’의 의미를 형식화하는 작업은 예를 들어 형식체계 *P*와 같은 체계를 구성해 설명하는 방식이다. 그리고 이러한 방식은 수학이나 논리학에서 사용하는 기호들을 나열하고 논리 연산자 및 규칙을 규정한 후 이들을 조합하여 적형식(well-formed formula) 혹은 진술을 규정하는 단계를 거친다. 덤밋이 생각하기에 피상적 형식주의자들은 이러한 식들과 논리 연산자들의 조합을 통해 만들어진 진술이나 식이 어떻게 의미를 지니는가에 대해 아무런 설명도 제시하지 않는다고 여기는 것 같다. 이와 유사한 언급은 덤밋의 2000년도 저작인 『직관주의의 원리들』(*Elements of Intuitionism*)에서도 살펴 볼 수 있다.

‘직관주의자들은 처음부터 형식화에 적대적이었다. 그러므로 주어진 이론의 진술을 증명하는 것으로 직관적으로 인식되는 심적 구조물이 <u>의미에 호소하지 않는 기계적 절차</u>로 인식되는 임의의 계산에 대한 형식적 증명들과 동형이어야 한다는 입장은 그들에게 매우 가망이 없는 것이다.’(필자의 강조)[xlvii]

인용문에서 덤밋은 형식화의 과정을 ‘의미에 호소하지 않는 기계적 절차’로 고

있다.

40) 형식주의에 대한 비판과 형식체계의 사용에 대한 비판은 서로 구별되어야 할 것이다. 왜냐하면 형식체계의 사용에 대해 적대적인 직관주의자들 중 아렌드 헤이팅(Arend Heyting, 1956/1971, pp. 4-5)과 같은 직관주의자는 형식화 작업이 무조건 배격되어야 하는 것은 아님을 인정하기 때문이다. 또한 그는 형식체계가 일상언어의 근본적인 애매성을 배제할 수 있는 극도로 간결한(simple) 수학적 구조(mathematical structure)일 수 있음을 말하며 강력한 수학적 도구가 될 수 있음을 인정한다. 또한 (나)에서 언급하는 피상적 형식주의는 ‘우리가 해석을 제시하는 기호들에 대해 아무런 설명도 제시하지 않는다’는 입장을 지니고 있으나 모든 형식주의자들이 이러한 입장을 지니고 있다고 보기는 힘들 것이다.

려하고 있음을 보여준다. 그가 '피상적 형식주의'를 '우리가 해석을 제시하는 기호들에 대해 아무런 설명도 제시하지 않는' 입장으로 고려한 것과 함께 생각해 볼 때, 덤밋이 '형식화'에 대해 생각하는 첫 번째 의미는 '의미에 호소하지 않는 기계적 절차'라고 생각할 수 있을 것 같다.[41] 그리고 '형식화'에 대한 덤밋의 두 번째 이해는 앞서 언급된 (햐)를 통해 살펴 볼 수 있을 것 같다.

(햐) 정확한 개념이 종종 막연히 직관적인 개념을 대신할 수 없듯이 형식체계가 직관적인 증명들을 대신하지 못한다고 말할 수 있다

이 언급에 따르면 '정확한 개념'과 '형식체계' 그리고 '막연히 직관적인 개념'과 '직관적인 증명'을 대칭으로 나열해 설명하고 있다. 말하자면, 형식체계에 의해 어떤 표현의 의미를 설명하는 방식은 "정확한 표현"을 사용해 규정하는 방식으로 생각할 수 있어 보인다. 그러므로 덤밋이 고려하는 '형식화'의 의미는 다음과 같이 요약될 수 있다.

전제 III.3.1. 어떤 표현의 의미를 형식체계를 통해 특성규정한다는 것(혹은 형식화한다는 것)은 최소한 다음의 두 가지 특징을 지닌다. *i*) 형식화는 의미에 호소하지 않는 기계적 절차에 의한 특성규정이다. *ii*) 형식화는 어떤 표현의 의미에 대해 할 수 있는 한 애매하고 모호한 표현을 피하고 보다 명확한(definite) 표현에 의한 특성규정이다.[42]

전제 III.3.1에서 언급한 두 가지 특징 이외에 덤밋이 '형식화'에 대해 생각하는 바가 추가적으로 있을 수 있다. 적어도 이 글에서 그러한 측면은 필자의 역량을 넘어서는 부분이다. 그러므로 '형식화'에 대해 덤밋은 적어도 전제

41) 실제로 덤밋의 1991a년 저작 『프레게: 수리철학』의 20장과 2000년 저작 『직관주의의 원리』 7장에서도 '형식주의'에 대해 이와 유사하게 설명한다. 그는 (피상적 혹은 극단적인) 형식주의자들이 수학적 진술(혹은 식)들을 해석이 제시되지 않은 문자열(uninterpreted strings of features)로 이해한다고 여기며 그렇기에 그러한 진술들이 참 혹은 거짓의 진리값을 지니는 의미를 지니는 진짜 진술(genuine sentence)로 여기지 않는 입장으로 고려한다.

42) 전제 III.3.1은 '형식화'를 정의한 것이 아니라 특징을 설명한 것이니 순환적 정의는 아님을 알아주기 바란다.

III.3.1에서 언급된 두 가지 특징을 고려한다는 것을 전제하고 글을 진행할 것이다. 그렇다면 전제 III.3.1을 따를 때, 형식체계 P에 의한 특성규정 이외의 형식화를 제시하는 방식이 가능한가? 물론, 가능하다고 여기는 입장은 있을 수 있다. 왜냐하면 형식체계 P를 구성하는 원초 회기 함수를 통해서 정의할 수 없는 함수를 지닌 체계가 존재한다고 말할 수 있기 때문이다.

전제 III.3.1의 i)에서 언급하듯이 덤밋은 '형식화'를 의미에 호소하지 않는 "기계적인 절차"로 고려하는 듯하다. '어떤 함수 f에 대한 기계적인 계산절차가 존재한다'를 'f를 계산할 튜링머신(Turing machine)이 존재한다' 혹은 'f를 계산할 알고리듬(algorithm)이 존재한다'로 여길 때, 이는 'f가 회기적이다'와 동치이다.[43] 형식체계 P는 원초회기 함수[44]를 통해 구성된 체계이므로 이 체계 내에서 도출되는 식들 및 이를 구성하는 함수들에 대한 기계적인 계산절차가 존재한다. 문제는 자연수에 관한 특수한 함수의 경우 형식체계 P를 구성하는 원초회기 함수를 통해서 정의할 수 없는 것이 있다는 점이다. 예를 들어 아케르만 함수(Ackermann function)의 경우 논항에 0을 적용할 경우 덧셈 함수의 기능을 하고 1일 경우 곱셈, 2일 경우 지수 함수 그리고 3 이후부터는 초지수 함수(super-exponential function)가 적용된다. 그리고 이 함수는 $Ack(0)=0+0=0$, $Ack(1)=1 \cdot 1=1$, $Ack(2)=2^2$ 그리고 $Ack(3)=3^{3^3}=7625597484987$과 같이 원초 회기 함수 보다 매우 빠르게 증가하며 회기 함수이지만 일반적인 원초 회기 함수와는 다르게 회기적 절차를 이중으로 거치는 함수라서 원초 회기 함수라고 할 수 없다.[45] 하지만 이러한 함수가 존재한다는 사실이 형식체계 P 이외의 형식체계가 존재함을 보여주는 가? 그리고 그러한 형식체계가 존재한다면 그 형식체계에 의해 '자연수'의 의미는 완전히 특

43) 마틴 데이비스(Martin Davis)의 1958/1973년 저작 『계산가능성과 해결불가능성』(*Computability and Unsolvability*), 4장을 참고하라.

44) 원초 회기 함수는 회기 함수이지만 모든 회기 함수가 원초 회기 함수인 것은 아니다. 일반적으로 '원초 회기 함수'(primitive recursive function)란 특성 함수(characteristic function), 후계 함수(successor function), 영 함수(zero function) 그리고 동일성 함수(identity function)들 이거나 이들을 유한하게 조합하여 얻은 회기 함수를 말한다. 보다 자세한 설명은 데이비스(1958/1973)의 3장을 참고하라.

45) 아케르만 함수에 관해서는, 불로스, 버지스 그리고 제프리(2003)의 7장 혹은 톨켈 프란젠(Torkel Franén, 2004)의 『소진불가능성』(*Inexhaustibility*) 9장을 참고하라.

성규정되는가? 아마도 그렇지는 않을 것 같다. 형식체계 P이외의 형식체계는 존재할 수 있더라도 최소한 그러한 형식체계가 ‘자연수’의 의미를 완전히 특성규정하기 위한 것이라면 형식체계 P를 포함해야 할 것이고 형식체계 P를 포함한다면 괴델 정리가 적용될 것이기 때문이다.

‘자연수’의 의미에 대한 완전한 특성규정은 자연수에 관한 참인 순수히 산술적인 진술에 대한 특성규정을 포함한다. 그리고 이러한 진술들의 대부분이 원초 회기 함수에 의해 표현될 것이다. 다시 말해, 만약 ‘자연수’의 의미를 완전히 특성규정하기 위한 형식체계라면 아케르만 함수를 포함한다고 하더라도 형식체계 P의 확장일 수밖에 없을 것 같다. 즉, 여전히 괴델 정리가 적용되는 형식체계라는 것이다. 괴델 정리가 적용된다면 참으로 인식되지만 그 체계 내에서는 증명도 반증도 되지 않는 비결정성 산술적 진술이 존재하니 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정된다고 바라 볼 수 없을 것이다. 그러므로 “형식체계 P 보다 적합한 특성규정 방식 M”이 형식체계라면 이를 통해 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정된다고 바라보기는 힘들 것 같다.

그렇다면 M이 형식체계가 아니라면 ‘자연수’의 의미는 완전히 특성규정될 수 있는가? 직관주의의 입장을 받아들이는 덤밋에게 ‘증명가능성’의 의미는 본질적으로 비형식적이라고 알려져 있다. 그리고 ‘증명가능성’의 의미를 ‘본질적으로 비형식적’이라고 기술하는 것은 직관주의자나 덤밋이 비형식적인 방식으로는 ‘자연수’나 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정됨을 받아들이는 듯한 오해의 여지를 남긴다. 하지만 적어도 덤밋은 반대논증 II.1.3의 전제 (2)를 받아들이지 않기 위해서라도 그러한 것을 주장해서는 안 될 것이다. ‘증명가능성’의 의미가 본질적으로 비형식적이라는 입장에 대한 이해는 전제 III.3.1의 $ii)$와 관련이 있을 것이다. 그러므로 다음 4절에서는 이에 대해 알아보자.

4. 비형식적 방식에 의한 특성규정?

형식체계 P 보다 더 적합한 특성규정 방식 M이 존재하고 이것이 또 다른 형식체계가 아닐 때, M에 의해서 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정된다면 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 덤밋의 입장은 재고될

수 밖에 없다. 그러므로 사용의미론이 옳으냐 그르냐에 대한 문제가 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되느냐 마느냐의 문제와 별개라는 덤밋의 입장은 재고될 여지가 생기며 덤밋이 반대 논증 II.1.3에 대해 적절하게 대응했다고 바라 볼 수 없을 수 있다. 하지만 이를 위해서는 '자연수'의 의미를 완전히 특성규정하는 형식체계가 아닌 다른 방식이 존재함을 보여야한다. 혹자는 '증명가능성'의 의미가 본질적으로 비형식적이라고 하므로 비형식적 체계에서는 '자연수'의 의미나 '증명가능성'의 의미가 완전히 특성규정될 수 있다고 여기는지도 모르겠다. 이를 평가하기 위해서는 "비형식적인 방식"이 무엇인지에 대한 논의가 필요하다. 3장 2절에서 짧게 언급했듯이 덤밋은 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는 듯하고 이러한 그의 가장 큰 근거는 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능하다는 것이었다. 그리고 다음과 같은 언급이 보여 주듯이 괴델 정리는 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능하다는 강한 근거가 된다.

'그러나 이 경우에는 '자연수' 표현에 대한 이해는 어떤 것이 모든 자연수들에 대해 참이라고 주장하는 근거로서 어떤 것을 인정할 기준을 결정하기에 불충분할 것이다. 그리고 괴델 정리에 의해 무한정 확장가능하다고 보여진 것이 바로 그러한 근거 개념이다.'(xlviii)

다시 말해, 비형식적인 방식으로 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정하기 위해서는 모든 자연수 전체에 대한 완전한 특성규정을 포함해야 할 뿐만 아니라 괴델 정리가 적용되지 않는 어떤 방식이어야 할 것처럼 보인다. 간단한 예로 2장에서 언급된 2차 논리의 사용을 허용한 방식 역시 괴델 정리의 적용을 항상 허용할 수밖에 없을 것이므로 여기서 논의 대상이 되는 비형식적인 방식으로 고려되기는 힘들 것이다. 다시 말해, 비형식적인 방식을 통해 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되느냐 되지 않느냐의 문제는 '비형식적 방식'에 대한 보다 명확한 규정을 요구한다. 그리고 비형식적 방식을 통해 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다고 주장하지 않는 한 그에 대한 대답을 제시할 필요도 없을 것이다. 그러므로 3장 4절에서는 덤밋이 '비형식적'이라는 표현을 어떤 방식으로 사용했는지에 초점을 맞춰 그가 비형식적 방식을 통해 '자연수'나 '증

명가능성’의 의미가 완전히 특성규정 된다는 생각을 하지 않았음에 대해 논할 것이다. 논의는 특히 그가 “‘증명가능성’의 의미가 비형식적이다”라는 말을 어떻게 이해했는지에 대해 직관주의자들의 입장을 살펴보는 것으로 부터 추적해 갈 것이며 “‘증명가능성’의 의미가 완전히 형식화되지 않는다”는 의미 이상을 지니지는 않음에 대해 설명할 것이다. 그리고 ‘자연수’의 의미에 대한 특성규정이 ‘증명가능성’의 의미에 대한 특성규정을 포함할 경우 ‘자연수’의 의미 역시 본질적으로 비형식적이라고 할 수 있을 것이며 이는 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 형식화되지 않는다는 것으로 해석될 수 있음을 언급할 것이다. 마지막으로 이러한 설명은 덤밋이 어떤 비형식적인 방식을 통해 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정된다는 입장이 제시될 수 있다고 여긴 것은 아님을 말해준다고 결론지을 것이다.

만약 덤밋이 “‘증명가능성’의 의미가 (본질적으로) 비형식적이다”라고 여긴다면 이는 분명 직관주의자들의 생각에 영향을 받았기 때문일 것이다. 그리고 필자의 이해가 옳다면 덤밋의 입장은 자연수 혹은 자연수의 나열들에 대한 우리의 직관적인 이해는 최소한 일정 부분 모호한데 반해 언어나 형식체계를 통한 특성규정은 보다 명확한 설명을 제시한다는 것으로 보인다. 하지만 언어(혹은 형식체계)가 지닌 표현력의 한계로 인해 ‘자연수’의 의미에 대한 정확한 특성규정은 힘들다는 것 같다. 그러면 덤밋과 직관주의자들의 이러한 입장에 대해 더 자세히 알아보기 위해 직관주의자들이 왜 “‘증명가능성’의 의미가 비형식적이다”라고 주장을 했는지를 살펴보자.

먼저 브라우어의 입장에서도 ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 해석이 가능함을 살펴보자. 그리고 그의 입장을 따를 때, ‘‘증명가능성’의 의미가 본질적으로 비형식적’이라는 말이 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 형식화될 수 없다는 말 이상의 의미를 지니는 것은 아님에 대해 살펴보자. 트로엘스트라(A. S. Troelstra, 1991)에 따르면 브라우어의 직관주의는 다음과 같은 세 가지 특징을 지닌다.

‘1. 수학은 형식적이지 않다; 수학의 대상은 (이상적인) 수학자의 마음속에 있는 정신의 구성물이다. ... 2. 수학은 외부세계의 경험과는 독립적인 것이며 수학은 원리상 언어에 독립적이다. ... 3. 수학은 논리에 의존하지 않는다; 반면에, 논리는 수학의 부분

이다.'(xlix)

브라우어의 철학적 입장은 정확히 이해하기가 쉽지 않다 하지만 그의 철학이 트로엘스트라가 요약한 세 가지 특징을 지닌다는데는 이견이 없을 것이다. 브라우어는 왜 "수학은 형식적이지 않다"고 여겼을까? 트로엘스트라가 제시한 첫 번째와 두 번째 특징에 그 단서가 있다. 두 가지 특징에 따르면 브라우어는 "수학은 마음속에 있는 정신의 구성물로 언어에 독립적인 것"이라고 생각한다. 브라우어의 1905년 저작 "인생, 예술 그리고 신비주의"(Life, Art and Mysticism)에서는 이러한 생각이 묻어나는 언급들이 등장한다.

'과학적 사고는 인간의 두뇌에 제한된 의지가 고정된 상태일 뿐이기에 과학적 진리는 인간의 마음에 제한된 열망의 심취일 뿐이다.'(l)

브라우어는 과학적 사고는 인간의 마음에 제한된다고 여긴다. 그리고 이러한 입장을 가지는 이유는 아마도 언어를 통해서 그러한 사고를 올바르게 전달할 수 없다고 여기기 때문으로 보인다. 다음과 같은 두 언급이 필자가 이러한 생각을 하게 된 이유이다.

'(너) <u>심지어 논리학이나 수학과 같은 가장 한정된 과학에서도 서로 다른 두 사람이 과학이 구성되는 근본적인 개념(notion)에 대해 동일한 이해를하지는 않을 것이다.</u>'(필자의 강조)(li)

'언어는 그 자체로 의미를 지니지 않는다. 이러한 방향에서 견고한 기반을 찾으려고 노력하는 철학은 불행에 빠진다. ... 인간의 의지로부터 그것의 확실성을 도출하지 못하고 '순수한 개념'내에서만 살기를 주장하는 언어는 불합리하다. 모순에 붙잡히지 않거나 암묵적 가정(silent assumption) 없이 계속 말할 수 있다는 것은 곡예에서나 가치를 얻는 기술(art)일 뿐이다.'(lii)

(너)에서 언급하듯, 브라우어는 수학이나 논리에서도 어떤 두 사람이 그 분야를 구성하는 "근본적인 용어"에 대해 동일하게 이해할 수 없을 것이라고 생각한다. 넘겨짚어 보자면, 어떤 학문 분야에 대한 근본적인 특징에 대해 동일한

직관적인 이해를 마음속에서 할 수 있을지는 몰라도 그것을 어떤 언어적 표현으로써 제시할 때, 동일한 이해가 불가능하다고 여기는지도 모르겠다. 그리고 제시된 두 번째 인용문에서는 언어를 통한 의사소통이 어떤 결함과 오류를 지니고 있음을 묘사하는 것처럼 보이는데 이러한 언급들은 그의 언어에 대한 불신을 보여주는 것이라 생각할 수 있을 것이다.

브라우어의 철학을 분명하게 이해하기란 쉽지 않다. 또한 이 글의 목적이 그의 철학적 입장을 보다 명확하게 이해하는데 있는 것도 아니다. 하지만 한 가지 분명하게 알 수 있는 것은 브라우어가 수학과 같은 과학적 사고는 우리의 마음에 제한적이며 언어는 이를 전달하기에 결함을 지니고 있다고 여긴다는 것이다. 언어에 대한 브라우어의 불신은 1905년 저작에서만으로 그치지 않고 그의 1907년 저작 “수학의 기초들에 대하여”(On the Foundations of Mathematics), 1912년 저작 “직관주의와 형식주의”(Intuitionism and Formalism) 그리고 1948년 저작 “의식, 철학 그리고 수학”(Consciousness, Philosophy, and Mathematics)에까지 이어진다. 흥미로운 것은 언어에 대한 불신이 논리학과 수학에 대한 공리적 접근에 까지 이어진다는 것이다.

브라우어는 그의 1907년 저작에서 수학은 논리에 독립적이며 논리는 수학에 의존함을 주장하면서 동일한 수학에 대해 서로 다른 언어가 형성되며 그렇기에 그에 따른 논리 역시 서로 다르게 형성됨을 다음과 같이 주장한다.

‘... 주어진 인간지성의 동일한 구조와 그 결과로 주어진 동일한 수학에 대해, 논리적 추론의 언어가 적합하지 않을 그러한 다른 언어가 형성될 것임은 손쉽게 생각될 수 있다.’[liii]

에릭 취-제임스(Eric P. Tsui-James, 1998, p.147)가 요약하듯이 브라우어는 논리학을 언어로 부터 추출(abstract)된 것으로 여기는 듯하다. 브라우어의 이러한 추상적 사고를 정확히 이해하기는 힘들더라도 동일한 수학적 구조에 대해 서로 다른 언어가 형성된다는 주장은 그의 언어에 대한 불신을 다시 한 번 생각하게 하며 언어에 대한 불신이 논리에까지 이어짐을 볼 수 있게 한다. 그리고 여기서 더 나아가 논리로 번진 그의 불신은 수학의 공리적 작업에까지 이어진다. 1907년 저작에서 그는 ‘공리화’라는 표현 대신 ‘언어적 구

조'(linguistic structure)라는 표현을 써서 이러한 언어적 구조를 구성할 수 있더라도 이 구조 밖의 수학에 대해서는 전혀 알 수 없다고 다음과 같이 설명한다.

'실제(actual) 수학적 구조물들 내에서 기초 수학적 참들을 동반하는 언어적 상들(linguistic images)의 근간에 있어, 언어적 구조와 문장들의 나열들을 논리 규칙에 따라 건설하는 것은 때로 가능한 일이다. 만약 그러한 구조가 모순의 언어적 형식을 생성할 수 없더라도, 그것은 언어적 구조의 특성 내에만 있는 수학을 다룬 것일 뿐이다. 그리고 그 구조의 밖에 있는 수학인 일상적인 산수(ordinary arithmetic)나 기하학에 대해서는 전혀 다루지 않은 것이다.

그러므로 이러한 언어적 구조들을 통해 수학의 지식을 얻을 수 있다는 생각은 잘못된 것이다. 왜냐하면 그것은 직접적인 직관을 통해 구성되는 것과는 동떨어진 것이기 때문이다.'[46](liv)

그리고 브라우어는 이러한 언어적 구조를 제시하는 작업들이 잘못되었다는 예로 공리적 수학과 게오르그 칸토르(Georg Cartor)의 초한수 이론(theory of transfinite numbers), 페아노 산수와 러셀의 논리주의 작업 그리고 힐베르트의 수학기초론 작업에 대해 비판한다. 브라우어의 이러한 논리는 1912년 및 1948년 저작에서도 거의 유사하게 등장한다.[47] 물론 브라우어의 이러한 비판이 괴델 정리를 증명하기 위해 구성하는 형식체계 P와 같은 기계적 계산절차에 대한 비판으로 이어질 수 있냐고 물을지도 모르겠다. 하지만 형식체계 P의 언어가 지니는 표현력이 집합론의 공리나 2차 논리를 허용하는 페아노 산수의 공리계가 지닌 표현력 보다 더 크다는 전제를 하지 않는 한 브라우어의 비판은 형식체계 P에도 적용될 수 있을 것이다. 다시 말해, 형식체계 P 역시 브라우어에게는 일종의 '언어적 구조'이며 그렇기에 형식체계 P를 통해서는 정확한 수학에 대해 알 수 없다는 입장을 그가 가질 수 있음은 충분히 고려될 수 있다.

브라우어의 이러한 태도를 볼 때, 만약 '증명가능성'의 의미에 대한 이

46) 인용문의 마지막 두 문장은 그대로 번역할 경우 오해의 여지가 있어 일부 의역했음을 밝힌다.

47) 브라우어(1912), pp. 84-86 및 브라우어(1948), pp. 48-49를 참고하라.

해가 수학에 대한 본질적인 이해의 일부분이라면 그는 ‘증명가능성’의 의미가 언어적 구조를 통해 완전히 명확하게 이해될 수 없다고 바라 볼 것이다. 그리고 이는 형식체계를 구성하거나 공리적 방법을 통해 언어적 구조물을 건설하는 방법으로는 ‘증명가능성’의 의미에 대해 완전한 특성규정을 할 수 없다는 해석을 가능하게 한다. 하지만 여기서 한 가지 물음이 제시될 수 있다. 우리는 어떻게 ‘증명가능성’의 의미를 완전히 명확하게 이해할 수 있는가? 만약 브라우어가 ‘증명가능성’의 의미를 완전히 명확하게 이해할 방안을 제시했다면 비언어적으로 그래서 비형식적으로 ‘증명가능성’의 의미를 완전히 특성규정하는 방법을 제시했다고 볼 수 있을 것이고 그렇다면 ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 덤밋의 입장은 재고될 수도 있다. 하지만 브라우어가 그러한 방식을 제시한 것으로 보이지는 않는다. 첫째로, ‘증명가능성’ 및 ‘자연수’의 의미가 완전히 명확하다고 하더라도 언어를 사용해 이들의 의미를 전달할 경우 항상 결함이 있음을 브라우어는 주장할 것이다. 즉, ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’에 대한 완전히 명확한 이해를 한다고 하더라도 이들의 의미가 언어를 통해 완전히 특성규정된다고 여기지는 않을 것이다. 이는 다음과 같은 언급에서 찾아 볼 수 있다.

‘정의들(definitions)의 체계에서 환원되지 않고 남겨져야할 수학적 구조의 요소들이 존재한다. 그러므로 이는 의사소통을 할 때, 단일한 단어나 기호에 의해 이해되어져야 한다. ... 수학적 직관과 독립적인 수학의 논리적 구조는 불가능하다. — 이러한 방식에 의해서는 언어적 구조가 설명하는 것 이상을 얻을 수 없기 때문이다. ... — 게다가 결국 이는 모순이다. — 왜냐하면 논리적 체계는 수학 그 자체가 필요로 하는 것만큼이나 기초적인 수학적 직관을 필요로 하기 때문이다.’(lv)

‘... 수학적 이론이 모순적이지 않다는 증명에 의해, 유한한 수의 단어들로 그 이론의 개념들을 정의할 수 있다는 가능성에 의해 혹은 그 이론이 사람들 사이에서 오해를 이끌지 않는 실제적인 확실성에 의해 직관주의자가 그 이론의 정확성을 확신할 수는 없다.’(lvi)

브라우어는 수학적 직관이 중요함을 끊임없이 주장한다. 하지만 그는 언어적 구조를 통해서는 정확한 수학에 다가갈 수 없다는 주장을 할 뿐, 그 이외의

수학을 탐구하는 비언어적 방식을 통해 수학적 이론 혹은 '증명가능성'을 특성규정하는 방식을 제시했다고 바라보기는 힘들 것 같다. 다시 말해, 브라우어는 다음과 같은 전제도 받아들이지 않을 것이다.

전제 III.4.1. 임의의 주어진 수학적 표현 e에 대해, 만약 e의 의미가 완전히 명확하다면 e의 의미는 (어떤 형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정된다.[48]

물론 덤밋이 전제 III.4.1을 받아들일 지는 알 수 없으나 최소한 그가 이를 받아들일 여지는 있을 것이다.[49] 만약 덤밋이 전제 III.4.1을 받아들인다면 덤밋과 브라우어는 서로 다른 입장을 지니는 것으로 해석될 수 있을 것이다. 하지만 한 가지 분명한 것은 브라우어도 '자연수' 및 '증명가능성'의 의미가 완전히 특성규정된다고 보지는 않을 것이란 점이다. 둘째로, 이들 표현의 의미를 언어를 사용하지 않고 특성규정할 수는 없다는데서 브라우어가 두 표현의 의미가 완전히 특성규정된다고 여길 여지가 더욱 희박해진다. 또한 1948년도 저작과 같은 이후의 저작에서도 수학에 대한 고전적인 분석보다 직관주의적 분석이 수학적 참에 더 가깝다는 언급을 하기는 하지만 이것을 비언어적인 혹은 비형식적인 어떤 방식을 통해 '증명가능성'의 의미나 수학에 대한 특성규정을 제시한 것이라고 해석하기에는 무리가 있다.

이렇게 브라우어의 입장을 거칠게나마 살펴 볼 때, '수학은 형식적이지 않다'라는 말에 대한 그의 의미는 수학은 완전히 형식화(특성규정)될 수 없다는 의미 이상은 아니어 보인다. 마찬가지로, 그가 '증명가능성'의 의미가 '본질적으로 비형식적'이라고 설명한다면, 이것의 의미는 '증명가능성'의 의미가 완전히 형식화되지 않음을 설명하는 것이지 어떤 비형식적인 방식이 있어서 그러한 방식으로는 '증명가능성'의 의미가 완전히 특성규정된다는 것은 아닐

48) 이는 논제 II.1.4인 "**논제 II.1.4.** 임의의 주어진 수학적 표현 e에 대해, 만약 e의 의미가 어떤 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확하다."의 역임을 참고하라.

49) 물론 덤밋(1963a), p. 198에서 그는 '수학적 표현의 사용은 단일한 형식체계에 의해 [완전히] 특성규정될 수 있는데 이는 오직 표현의 뜻이 완전히 명확할 때이다'라고 표현하고 있다. 다시 말해, 그는 '오직 ...할 경우에만'(only if)이란 표현을 사용함으로써 논제 II.1.4의 역을 받아들이지 않는 것처럼 기술하고 있다.

것이다.

헤이팅(1956/1971) 역시 이러한 입장에서 크게 벗어나지는 않는다. 물론, 그는 브라우어와 달리 형식화에 대해서 유연한 모습을 보인다.

‘심지어 직관주의 수학에서도 이론의 마무리된 부분(the finished part of a theory)은 형식화될 수 있다는 게 사실이다. 그러한 형식화의 의미를 반성하는 것은 잠깐이나마 유용할 것이다. 개별적으로 적합한 언어 내에서, 우리는 형식체계를 수학적 사유의 언어적 표현으로 고려할 수 있다.’(lvii)

헤이팅은 최소한 “마무리된 부분”에 대해서는 형식화가 가능하다고 여기며 형식체계는 유용한 수학적 도구임을 인정한다. 하지만 ‘수학적 구조를 따를 수 있는 형식화 작업임에도 직관주의는 형식화와는 독립적으로 나아감’(lviii)을 여전히 고수한다. 그러므로 헤이팅 역시 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 형식화됨을 인정한다고 볼 수 없을 것이다. 또한 그 역시 ‘증명가능성’의 의미에 대한 마무리된(finished) 수학적 구조를 제시하지는 않았으므로 만약 헤이팅이 ‘증명가능성’의 의미가 비형식적이라고 주장했다면 그것의 의미는 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 형식화되지 않음을 주장하는 것으로 이해해야지 어떤 비형식적인 방식이 있어서 그 방식으로는 ‘증명가능성’의 의미를 완전히 형식화(특성규정)할 수 있음을 주장한 것으로 이해해서는 안 될 것이다. 그리고 그가 ‘자연수’의 의미를 완전히 특성규정하기 위해 자연수에 관한 순수히 산술적인 진술들을 얻는 증명의 원리에 대한 완전한 특성규정이 요구된다고 여기고 그래서 ‘증명가능성’의 의미에 대한 완전한 특성규정이 요구된다고 여긴다면, 그 역시도 ‘자연수’의 의미가 형식체계에 의해 완전히 특성규정된다고 주장하지 않을 것이다.

필자의 이해가 옳다면 ‘‘증명가능성’의 의미가 비형식적이다’에 대한 덤밋의 입장도 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 형식화되지 않는다는 것 이상은 아닐 것이다. 또한 이러한 해석은 ‘증명가능성’과 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는 그의 입장에도 부합한다. 그렇다면, “‘증명가능성’의 의미가 비형식적이다”라는 말의 의미를 덤밋이 어떻게 받아들일지에 대해 더 자세히 살펴보기 전에 브라우어와 헤이팅의 입장이 덤밋의 입장

에서, 특히 '자연수'의 의미와 관련해서 어떻게 나타나는지를 먼저 살펴보고 넘어가자. 이러한 고려는 다소 불필요하게 여겨질 수도 있으나 덤밋이 '증명가능성' 및 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능하다고 여기는 배경을 추측하게 해 줌으로써 '증명가능성' 및 '자연수'의 의미가 (본질적으로) 비형식적임을 그가 어떻게 이해하는지에 대해 알아보는 데도 도움이 될 것이다.

브라우어/헤이팅과 덤밋의 입장을 살펴 볼 때, 눈에 띄는 부분은 헤이팅의 경우를 보더라도 그가 '자연수'의 의미에 대해서 덤밋과 유사한 견지에서 설명한다는 것이다.[50] 헤이팅(1957/1971, p. 7)은 아이들이 '자연수'의 의미를 이해하면서 자연수들의 나열이 무한정 지속(indefinitely continued)된다는 사실을 받아들인다고 설명하면서 다음과 같이 자연수의 기수(cardinality)는 완전히 명확하거나 확실한 형태로 (언어적 표현을 통해) 제시될 수 없음을 주장한다.

'(더) <u>초등학교의 어린이들은 자연수가 무엇인지 이해한다. 그리고 자연수들의 나열이 무한정으로 지속됨(indefinitely continued)을 받아들인다.</u>'(lix)

'(러) <u>자연수의 기수에 대해 우리는 완벽한 의미(sense)에서 확실성(certainty) 혹은 명확함(definiteness)에 대한 형식을 주장하지는 않는다. 그러한 것은 실현불가능한 것이다.</u> 하지만 수학을 건축하는데 있어 충분히 분명(clear)하다고 주장한다.'(lx)

헤이팅의 이러한 입장은 '자연수'의 의미가 완전히 명확하지 않다고 여기는 덤밋의 입장과 유사해 보인다. 여기에 논제 II.1.4 그리고 III.2.4를 헤이팅이 받아들인다면, '자연수'의 의미가 형식체계 P 혹은 그것을 포함하는 다른 형식체계에 의해 완전히 특성규정되지 않음을 받아들일 것이다. 그리고 다음은 덤밋(1963a, pp. 189-190 그리고 pp. 193-194)이 우리가 '자연수'의 의미를 어떻게 이해하며 그것의 의미가 무한정 확장가능해서 완전히 명확하지 않다고 최초로 언급한 전문이다. 다소 긴 설명이나 덤밋의 의도를 파악하는데 있어

50) 저작의 시기상으로 볼 때, 그리고 덤밋(1978, p. xxiv)이 '프레게를 통해 플라톤주의적 견해를 굳게 다졌던 나는 점차적으로 직관주의에 점점 공감하게 되었다.'는 언급을 볼 때, 덤밋이 브라우어와 헤이팅의 직관주의적 입장을 차용해서 '자연수'의 의미가 완전히 명확하지 않다는 입장을 받아들였다고 보는 것이 더 설득력 있을 것이다.

이를 옮기는 것이 불필요하지는 않을 것이다. 첫 번째 인용문은 헤이팅이 (더)와 (러)에서 언급한 ‘자연수’의 의미에 대해 우리가 이해함에도 자연수의 기수 혹은 자연수들의 전체에 대해 “완벽한 의미에서의 명확한 형식이 제시됨”을 주장하지 않는 이유를 덤밋의 의미론적 입장에 부합하게 부연 설명한 것으로 고려할 수 있어 보인다. 그리고 두 번째 인용문은 ‘자연수’를 예로 브라우어가 (너)에서 “심지어 수학과 같은 가장 한정된 과학에서도 서로 다른 두 사람이 수학의 근본적인 개념(notion)에 대해 동일한 이해를 하지는 않을 것”이라고 언급한 바를 덤밋의 의미론적 입장에 부합하도록 부연 설명한 것으로 고려할 수 있어 보인다.[51)]

‘훈련을 아무리 많이 시키더라도 침팬지에게 말을 가르칠 수는 없을 것이다. 그렇다면 우리는 개념이 아이들의 마음에 잠재적이라고 가정할 수 있다. 그렇기에 단어의 사용을 훈련하는 것은 개념을 일깨우고 동시에 아이들이 단어와 개념을 연관시키도록 이끈다. 게다가, 단어의 사용에 대한 어떠한 유한한 기술도 그 단어가 지닌 개념에 대해 완전히 설명할 수 없는 게 사실일 것이다. (머) 우리 모두는 '자연수' 개념(concept)에 대해 이해한다. 하지만 우리의 산술적 진술들에 대한 사용을 유한하게 기술하는 것은 이 개념에 대한 우리의 이해를 완전히 설명하는 것(full account)으로 여겨지지 않는다. 그리고 이는 (버) 개념에 대한 우리의 직관적인 이해에 호소하여 어떤 진술이 참임을 항상 인식할 수 있음을 보여준다. 그것의 진리값이 그러한 진술의 사용에 대한 기술로부터 도출될 수 없더라도 말이다.’(필자의 강조)[(lxi)]

‘유한한 전체를 고려하더라도, 그러한 전체에 대한 이해는 대상이 그 전체에 속하는 것으로 인식되는 방식으로는 완전히 특성규정되지 않는다. (서) 이는 두 사람이 어떤 대상을 그 전체에 속하는 것으로 인식하고 그래서 그러한 인식을 하는 그들의 성향에 대해 동의할 수 있더라도 그 전체의 모든 대상들에 대해 참임을 주장하는 기준에 대해서는 서로 다르게 받아들이기 때문이다. 더군다나 그 전체가 무한하다면 이러한 사실은 더할 것이다. 일상에서 일어나듯이 두 사람이 특정 표현을 통해 동일한 것을 의미하는

51) 여기서 제시된 덤밋의 설명이 브라우어와 헤이팅의 입장을 부연 설명하기 위한 것이었다는 것을 주장하는 것이 아니다. 다만 직관주의자들의 생각에 공감하게 되었다는 덤밋의 입장을 생각해 볼 때, 일정 이상의 영향을 받았다는 것은 분명할 것이다. 그러므로 적어도 브라우어/헤이팅이 제시한 ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미에 관한 그들의 직관을 덤밋 그 자신의 의미론적 입장으로 해석했다고 바라 볼 수 있을 것이라는 말이다.

가에 대한 질문은 실제로 완전히 명확(entirely definite)하지 않다. 그러므로 (어) 술어의 의미에 동의하기에 그 술어를 올바르게 적용할 기준에 관해 동의하는 것이 자연스러울 그러한 맥락이 존재함은 의심할여지가 없다. 이러한 의미에서 우리는 '자연수' 표현에 대한 유일하고 명확한 의미를 가진다. 그러나 이 경우에는 (저) '자연수' 표현에 대한 이해는 어떤 것이 모든 자연수들에 대해 참이라고 주장하는 근거로서 어떤 것을 인정할 기준을 결정하기에 불충분할 것이다. 그리고 괴델 정리에 의해 무한정 확장가능하다고 보여진 것이 바로 그러한 근거 개념이다. 즉, 모든 자연수에 대해 주장을 제시하는 바의 근거들의 집합(class)에 대한 임의의 한정적인 특성규정(any definite characterization)에 대해, 그것에 대한 자연스러운 확장이 있을 것이다. 만약 우리가 '자연수' 표현의 의미를 하나의 자연수를 나타내는 용어로 인식하는 기준과 연관시킬 뿐만 아니라 모든 자연수에 대한 어떤 것을 주장하는 기준과도 연관시키기 위해서 '의미'라는 단어(word)를 다르게 이해한다면, 우리는 '자연수'의 의미가 본질적으로 모호하다고 인식해야 한다.'[lxii]

먼저 헤이팅의 언급이었던 (더)와 (러)를 덤밋의 (머)와 비교해 보자.

(더) 초등학교의 어린이들은 자연수가 무엇인지 이해한다. 그리고 자연수들의 나열이 무한정으로 지속됨(indefinitely continued)을 받아들인다.
(러) 자연수의 기수에 대해 우리는 완벽한 의미(sense)에서 확실성(certainty) 혹은 명확함(definiteness)에 대한 형식을 주장하지는 않는다. 그러한 것은 실현불가능한 것이다.
(머) 우리 모두는 '자연수' 개념(concept)에 대해 이해한다. 하지만 우리의 산술적 진술들에 대한 사용을 유한하게 기술하는 것은 이 개념에 대한 우리의 이해를 완전히 설명하는 것(full account)으로 여겨지지 않는다.

(더)와 (러)는 자칫 서로 모순적인 주장을 하는 것으로 고려될 수도 있는데, (더)에서 어린 아이들이 이해하는 것은 1이 자연수인지 아닌지 $\sqrt{2}$가 자연수인지 아닌지를 구별할 줄 안다는 방향에서 '자연수'의 의미를 이해한다고 생각할 수 있다. 그리고 (러)에서 언급한 것은 "자연수의 기수"로 다시 말해 자연수들의 전체 나열 혹은 자연수 전체의 집합에 대해 말한 것이고 이러한 자연수 전체에 대한 명확한 형식을 제시하는 것이 실현불가능하다는 말이다. 하지

만 여전히 둘의 차이가 무엇인지 이해하기가 쉽지 않다. 덤밋은 이를 어떻게 이해하는지 (머)를 통해 살펴보자. (머)에서 덤밋은 ‘자연수’의 의미에 대한 이해와 이해한 바에 대한 “설명”을 구별해 ‘자연수’의 의미에 대해서는 우리가 이해할 수 있지만 그러한 이해를 “완전히 설명”하지는 못한다고 말한다. 다시 말해, 자연수 전체 나열에 대한 이해가 ‘자연수’의 의미를 이해하는 것에 포함된다면 헤이팅이 말한 “자연수 전체에 대한 명확한 형식의 제시”는 ‘자연수’의 의미를 이해한 바에 대한 설명을 제시하는 것으로 고려할 수 있을 것이다. 그렇다면 헤이팅과 덤밋은 왜 우리가 ‘자연수’의 의미를 이해할 수는 있지만 그러한 이해에 대한 완전한 설명은 제시할 수 없다고 여겼을까?

앞서 살펴보았던 브라우어의 입장을 상기시켜 보자. 그는 ‘언어적 구조들을 통해 수학의 지식을 얻을 수 있다는 생각은 잘못된 것’이라고 설명하며 ‘왜냐하면 그것은 직접적인 직관을 통해 구성되는 것과는 동떨어진 것이기 때문’(lxiii)이라고 설명한 바 있다. 다시 말해, 자연수에 대한 우리의 직관적인 이해를 언어를 통해서 제시할 경우 언어가 지닌 결함(imperfection) 때문에 자연수에 대한 우리의 직관적인 이해를 완전히 설명할 수 없다는 것이었다.[52] 이러한 차이는 덤밋의 (어)와 (저)에서 조금 다르게 설명되는 것으로 보인다.

(어) 술어의 의미에 동의하기에 그 술어를 올바르게 적용할 기준에 관해 동의하는 것이 자연스러울 그러한 맥락이 존재함은 의심할여지가 없다. 이러한 의미에서 우리는 ‘자연수’ 표현에 대한 유일하고 명확한 의미를 가진다.

(저) ‘자연수’ 표현에 대한 이해는 어떤 것이 모든 자연수들에 대해 참이라고 주장하는 근거로서 어떤 것을 인정할 기준을 결정하기에 불충분할 것이다. 그리고 괴델 정리에 의해 무한정 확장가능하다고 보여진 것이 바로 그러

52) 물론, 여기서의 ‘완전한 설명’을 ‘완전한 특성규정’으로 이해할 때 덤밋이 “자연수에 대한 우리의 직관적인 이해를 완전히 특성규정하지 못한다”고 여기는 이유는 브라우어와는 다를 것이다. 언어를 통해 우리가 이해한 바를 전달하는데 있어 언어가 지닌 표현력의 한계에 대해서는 덤밋도 인정할 것이다. 하지만 브라우어와 달리 덤밋의 경우 전제 III.4.1을 받아들일 여지가 있지 않나 생각된다. 먼저 덤밋은 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능하기에 이를 논제 II.1.4에 적용하여 ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되지 않을 것이라고 주장한 바 있다. 그리고 (저)에서 언급되듯이 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능한 근거로 괴델 정리를 들고 있다. 다시 말해, ‘자연수’의 의미가 완전히 특성규정되지 않기에 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능하다는 것으로 해석된다. 이는 전제 III.4.1을 받아들일 때나 제시될 수 있는 논리다. 그러므로 전제 III.4.1을 받아들이느냐 마느냐의 차이가 덤밋과 브라우어의 차이라고도 해석될 수 있을 것이다.

한 근거 개념이다.

(어)와 (저)에서 눈에 띄는 부분은 '우리는 '자연수' 표현에 대한 유일하고 명확한 의미를 가진다'는 부분과 ''자연수' 표현에 대한 이해는 어떤 것이 모든 자연수들에 대해 참이라고 주장하는 근거로서 어떤 것을 인정할 기준을 결정하기에 불충분할 것'이라고 언급하는 부분이다. 특히 (어)의 마지막 부분은 'we do have a unique and definite meaning for the expression 'natural number''를 번역한 것인데 여기서 'we ... have a ... definite meaning for the expression 'natural number''이라고 표현된 것은 "우리가 자연수 표현에 대해 명확히 이해한다"라는 의미로 생각할 수 있을 것이다. 흥미로운 점은 (저)에서 덤밋이 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능하다고 설명한다는 것이다. 다시 말해, 우리는 '자연수'의 의미를 명확하게 이해하지만 '자연수'의 의미는 무한정 확장가능하므로 앞선 설명에 따라 완전히 명확하지 않은 것이 된다. 다시 말해, 덤밋은 '자연수'의 의미는 명확하게 이해할 수 있지만 완전히 명확하지 않다는 다소 모순적인 주장을 하는 것으로 비춰질 수 있다. 하지만 (저)를 자세히 보면 그가 무한정 확장가능하다고 하는 것은 "모든 자연수들에 대해 참인 것을 주장하는 기반 대념(concept)"이 그렇다는 것이라고 설명한다. 즉, 주장을 제시하는 근거 개념이 무한정 확장가능한 것과 '자연수' 표현의 "적용"에 대해 명확히 이해한다는 것은 구별되는 것으로 보인다. 이에 대한 보다 자세한 설명은 다음과 같은 이후의 저작에서도 발견된다.

'우리는 자연수들의 전체에 대한 명확한 이해를 한다는 강한 신념을 지닌다. 하지만 우리가 실제로 명확하게 이해하는 것은 확장의 원리다. 다시 말해, 주어진 임의의 자연수에 대해 그것 보다 1 더 큰 것을 바로 끌어 낼 수 있는 원리 말이다.'(lxiv)

덤밋은 우리가 실제로 명확하게 이해하는 것은 1씩 확장하는 원리에 대해 명확하게 이해하는 것이라고 말한다. 그리고 그가 무한정 확장가능하다고 말했던 것은 '모든 자연수에 관한 어떤 것을 주장하는 근거 개념'이었다고 아래와 같이 설명한다.

‘나는 자연수 개념(concept)이 그 자체로 무한정 확장가능하다고 여기지 않았다.(유한주의자들은 아마 그렇게 생각할 것이다.) 또한 무한정 축소할 수 있는(retractable) 반대 속성을 지닌다고 고려한 것도 아니었다. 내가 무한정 확장가능하다고 했던 것은 모든 자연수에 관한 어떤 것을 주장하는 근거 개념(notion)이었다.’(lxv)

그리고 이러한 근거 개념에 대한 이해는 개개인 마다 다를 수 있음을 앞서 (서) 언급한 바있다.

(서) 두 사람이 어떤 대상을 그 전체에 속하는 것으로 인식하고 그래서 그러한 인식을 하는 그들의 성향에 대해 동의할 수 있더라도 그 전체의 모든 대상들에 대해 참임을 주장하는 기준에 대해서는 서로 다르게 받아들이기 때문이다. 더군다나 그 전체가 무한하다면 이러한 사실은 더할 것이다.

모든 자연수에 대한 어떤 것을 주장하는 근거 개념이 무한정 확장가능하다는 것은 참인 순수히 산술적인 진술들을 주장하기 위한 근거로써의 기준에 대해 어떠한 특성규정을 제시하더라도 그 특성규정에 대해 자연스러운 확장이 존재한다는 것을 뜻한다. 그러므로 애초에 제시한 특성규정이 포함하지 못하는 참인 순수히 산술적인 진술이 계속 존재하게 마련이라는 것이 된다. 이러한 설명은 그 방식이나 이유는 다소 차이가 있어 보이지만 우리가 직관적으로 이해한 수학적 지식이 결함을 지닌 언어를 통해서는 완벽히 제시 될 수 없다는 브라우어의 설명과도 유사해 보인다. 물론 ‘자연수’의 의미에 대해 직관적으로 이해할 때 브라우어의 경우 완전히 명확하게 이해한다는 입장을 지닐 지도 모르나 덤밋은 그렇지 않을 수 있다. 하지만 적어도 언어를 통해 우리가 직관적으로 이해한 바에 대해서 완벽히 명확하게 설명할 수 없다는 측면에서는 유사할 것이다. 덤밋(1994, p. 338)이 언급하듯 ‘자연수’ 표현의 적용에 대한 명확한 이해가 가능하다는 것과 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능하다는 입장이 서로 구별될 수 있는 것은 ‘어떤 개념 아래 포섭되는 모든 대상들에 대해 주장하기 위한 기준이 그 개념에 대한 본질적인 특징’(lxvi)이라는 그의 입장 때문이라고 할 수 있을 것이다.

이제 이러한 배경 지식 하에서 덤밋 역시 브라우어나 헤이팅과 마찬

가지로 “‘증명가능성’의 의미가 비형식적이다”라는 의미를 “‘증명가능성’의 의미가 완전히 형식화되지 않는다”는 것 정도로 이해했는지를 살펴보자. 3절에서 제시한 필자의 이해가 옳다면 형식화에 대한 덤밋의 거부는 피상적인 혹은 극단적인 형식주의에 대한 거부와 일부 유사한 방향에서 진행된다. 또한 전제 III.3.1에서 언급했듯이 그가 ‘형식화’라고 얘기할 때에는 최소한 ‘i) 의미에 호소하지 않는 기계적 절차에 의한 특성규정’과 ‘ii) 어떤 표현의 의미에 대해 할 수 있는 한 애매하고 모호한 표현을 피하고 보다 명확한 표현에 의한 특성규정’을 고려하는 것으로 생각할 수 있을 것이다. 그렇다면 덤밋이 “‘증명가능성’의 의미가 (본질적으로) 비형식적이다”라고 말하는 것은 어떤 의미일까? 우선적으로 생각할 수 있는 것은 3절에서 언급했듯이 덤밋은 ‘증명가능성’의 의미를 의미에 호소하지 않는 기계적 절차에 의해 특성규정할 경우 괴델 정리에 의해 이 표현의 의미가 완전히 형식화(특성규정)되지 않는다고 고려할 수 있다. 하지만 덤밋이 비형식적인 어떤 방식으로 ‘자연수’나 ‘증명가능성’의 의미가 완전히 특성규정된다고 여길 여지는 없는가? 적어도 필자가 아는 하에서는 없는 것 같다. 또한 앞서 언급한 (저)를 보더라도 덤밋은 ‘자연수’의 의미를 무한정 확장가능하다고 여기고 있으며 이것이 괴델 정리에 의해 보여지는 바라고 여긴다. 그리고 명제 III.2.2를 고려할 때, ‘증명가능성’의 의미에 대해서도 동일한 평가가 가능할 것이다. 다시 말해, ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미가 무한정 확장가능하다는 것이 형식체계 P를 통해 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미를 이해할 때에만 지니는 특징이 아니라면 논제 III.2.1에 따라 ‘자연수’와 ‘증명가능성’의 의미에 대한 어떠한 명확한 특성규정을 제시하더라도 그 특성규정에 포함되지 않는 확장이 존재하기 마련일 것이다.[53] 그러므로 ‘자연수’ 및 ‘증명가능성’의 의미에 관한 확정적인 특성규정이 제시될 수 없다는 것을 덤밋의 입장으로 고려할 수 있고 이러한 측면에서 덤밋은 두 표현의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는 것으로 이해하는 것이 더 적합해 보인다. 정리하자면, 덤밋 역시 ‘증명가능성’의 의미가 애초에 완전히 형식화(특성규정)되지 않는다는 방향에서 ‘비형식적’이라고 이해한다는 것이다.

‘자연수’의 의미에 대한 특성규정이 모든 자연수에 관한 참인 순수히

53) 여기서의 ‘특성규정’은 형식체계 P에 의한 특성규정만을 고려하는 것이 아니라 전제 III.2.4에서도 언급한 형식체계 P 보다 더 적합한 특성규정 방식 M을 포괄한다.

산술적 진술들을 도출하는 증명의 원리에 대한 특성규정을 포함한다면, 덤밋은 ‘증명가능성’의 의미가 비형식적이라고 여기고 또한 이는 ‘증명가능성’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 것으로 이해될 수 있으므로 ‘자연수’의 의미 역시 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 결론으로 이끌 것이다. 물론 이러한 입장이 받아들여지기 위해서는 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능함이 보여져야 한다. “‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능한가?”의 문제는 논란의 여지가 없지 않은 문제다. 덤밋의 이러한 입장이 받아들여지기 힘든 한 가지 이유는 ‘자연수’ 표현의 적용에 대한 우리의 이해가 명확한데(definite)도 불구하고 그가 ‘자연수’의 의미를 ‘본질적으로 모호하다’(inherently vague)고 표현하거나 ‘무한정 확장가능하다’(indefinitely extensible)고 표현하기 때문이다. 물론 앞서 언급했듯이 덤밋은 ‘자연수’의 의미를 우리가 명확하게 이해한다고 여기는 이유는 그것의 확장 원리를 명확히 이해하기 때문이지 자연수 전체 혹은 모든 자연수에 관한 어떤 주장을 제시하는 기반 개념(notion)을 개개인의 사람들이 동일하고 명확하게 이해한다는 것은 아니라고 설명할 것이다. 그리고 (햐)와 전제 III.2.4에서도 언급됐듯이 우리가 ‘자연수’의 의미에 대해 막연히 직관적으로 이해하며 또한 그 표현의 의미가 완전히 명확하지 않기 때문에 그것은 완전히 특성규정될 수 없다는 결론에 도달할 수 있다.

(햐) 정확한 개념이 종종 막연히(vague) 직관적인 개념을 대신할 수 없듯이 형식체계가 직관적인 증명들을 대신하지 못한다고 말할 수 있다.

전제 III.2.4. 임의의 주어진 수학적 표현 e와 형식체계 P 보다 더 적합하고 표현력이 큰 특성규정 방법 M에 대해, 만약 e의 의미가 M에 의해서 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확하다.

덤밋은 이러한 논의의 핵심을 다음과 같이 요약한다.

‘나의 주된 주장은 (1) 개념 아래 포섭되는 모든 대상들에 대한 것을 주장하는 기준이 그 개념의 본질적인(essential) 특징이지만 그 개념 아래 포섭되는 것으로 주어진 대상

들에 대한 기준과 함께 자동적으로 주어지는 것은 아니라는 것이었다. 그리고 (2) '자연수' 개념에 대해, 전자의 기준은 무한정 확장가능함에 대한 것이었다.'(lxvii)

이러한 덤밋의 설명에 따르면 '자연수'의 의미에 대한 특성규정은 "모든 자연수들에 대한 것을 주장하는 기준"에 대한 특성규정을 포함하고 또한 그러한 기준은 무한정 확장가능한 것이 된다. 그리고 이러한 덤밋의 입장이 지지될 때에만 '자연수'의 의미가 애초에 형식체계 P나 그 이외의 방법에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다는 입장이 보여질 수 있는 것이다. 하지만 이 문제는 여전히 논란의 여지가 있다는데서 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 덤밋의 입장은 여전히 의심을 받을 수 있다.[54]

실제로 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능하고 그래서 애초에 완전히 특성규정되지 않으며 이것이 사용의미론이 옳고 그른가에 독립적인 사실이라고 받아들이더라도 괴델 정리가 그의 사용의미론에 반례가 아니라는 결론은 도출되지 않을 수 있다. 왜냐하면 덤밋이 고려한 반대논증 II.1.3은 그 자신의 입장을 옹호하기에 적합하도록 구성된 반대논증일 수 있기 때문이다. 다음 장에서는 3장 1절 마지막에서 언급했듯이 반대논증을 개선함으로써 덤밋이 괴델 정리가 그 자신의 사용의미론에 반례라고 고려할 여지는 없는지 더욱 살펴 볼 것이다.

---

54) 여기서 의심 받을 수 있는 덤밋의 입장은 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 측면이다. 2차 논리의 사용을 허용하는 이는 형식체계 P의 범주성이 증명됨을 주장함으로써 유일한 자연수 집합이 특성규정될 수 있고 또한 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다고 주장할 수 있다.(전제 II.3.5) 그리고 덤밋의 입장이 '자연수'의 의미가 무한정확장가능하다는 주장에 기대어 있다고 하더라도 여전히 논란의 여지는 있다. 왜냐하면 '자연수'의 의미가 무한정 확장가능함을 주장하기 위해서는 '자연수'의 의미에 대한 특성규정이 "모든 자연수에 대한 것을 주장하는 기준"을 포함한다는 전제가 필요하기 때문이다. 하지만 이러한 전제를 받아들이냐의 문제는 논란의 여지가 있다. 알렉산더 조지와 다니엘 벨만((Alexander George and Daniel Velleman, 1998)의 경우 자연수 개념에 대한 연구에서 찰스 파슨스(Charles Parsons, 1992)와 덤밋(1963a)이 이러한 입장을 지닌다고 고려하나 일반적으로 받아들이는 입장이라고 설명하지는 않는다. 또한 파슨스의 주장은 '... 귀납이 '자연수'란 용어의 의미를 구성한다'(... induction is constitutive of the meaning of the term 'natural number'.)라고 기술한다는 측면에서 덤밋의 입장에 얼마나 부합할지 역시도 논란의 여지가 있다. 그러므로, '자연수'의 의미에 대한 특성규정에 "모든 자연수에 대한 것을 주장하는 기준"이 포함되어야 하는 가의 문제는 최소한의 논란의 여지를 담지한다고 할 수 있고 그렇기에 '자연수'의 의미가 무한정확장가능한가에 대한 문제 역시 논란의 여지를 담지한다고 할 수 있을 것이다.

IV. 개선된 반대 논증

1. 반대논증의 개선

괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 말을 들었을 때, 우리가 손쉽게 떠올릴 수 있는 것은 형식체계 P에서는 증명도 반증도 되지 않으나 참으로 인식되는 비결정성 진술(undecidable statement) U_P에 대한 것이다. 2장 3절에서 언급했듯이 형식체계 P는 참인 산술적 진술들을 회기적으로 나열한다. 그리고 이러한 과정은 "증명가능한 진술은 사용할 수 있다"는 것을 전제할 때, 형식체계 P에 의해 산술적 진술의 사용이 상술되는 것으로 고려될 수 있을 것이다.[55] 이때, 형식체계 P에서 증명도 반증도 되지 않는 보편양화된 비결정성 진술 U_P가 형식체계 P의 언어에서 표현가능하다. 말하자면, U_P는 참으로 인식되는 산술적 진술임에도 주어진 형식체계 P에 의해 증명도 반증도 되지 않으니 U_P의 사용은 형식체계 P에 의해 상술되지 않는다고 생각될 수 있다. 덤밋(1963a, p. 187)에 따르면 산술적 진술을 상술함으로써 '자연수'의 의미는 형식체계 P에 의해 특성규정되므로 U_P의 사용이 상술되지 않는 한 '자연수'의 의미는 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정될 수 없다는 결론(명제 II.1.1)에 도달할 수 있다. 여기서 한 가지 물음이 제기될 수 있다. 3장 1절의 후반부에서도 잠깐 언급됐듯이 U_P는 참으로 인식된다. 하지만 그럼에도 그 사용이 형식체계 P에 의해 특성규정되지 않는다는 것은 사용에 의해 설명되지 않는 진술의 의미가 있음을 보여주지는 않는가? 이러한 물음은 덤밋의 입장을 따르더라도 고려될 수 있다.

55) 형식체계 P가 어떤 표현의 의미를 사용을 통해 설명하는 하나의 방법으로 고려될 수 있느냐는 비판이 있을 수 있으나 만약 그러한 비판을 받아들인다면 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 입장 자체를 고려할 필요가 없어질 것이다. 또한 이러한 입장을 따를 경우 괴델 정리의 철학적 혹은 직관주의적 의의로 명제 II.1.1과 명제 III.2.2와 같은 해석을 제시하는 것 역시 옳지 않은 것으로 간주될 수 있다. 만약 이러한 주장이 형식체계에 관한 철학적 그리고 의미론적 의의를 따지는 것 자체가 잘못이라는 전제를 지니고 하는 주장이라면 왜 그러해야 하는 것인지에 대한 대답을 먼저 제시해야 할 것이다. 그리고 1장에서 언급했듯이 이 글의 목적은 덤밋의 괴델 정리에 대한 입장을 이해해 보는데 있다. 또한 덤밋은 "형식체계 P가 어떤 표현의 의미를 사용을 통해 설명하는 하나의 방법으로 고려될 수 없다"는 비판을 받아들이지는 않을 것이므로 이러한 입장을 고려해야 할 이유는 없을 것이다. 형식체계 P의 구성을 덤밋이 왜 '자연수'의 의미에 대한 특성규정을 제시하는 것으로 고려하는가에 대한 설명은 2장 2절을 참고하라.

덤밋은 직관주의를 옹호하고 검증주의 의미론[56]을 지지하기 때문에 다음과 같은 논제들을 받아들인다.

논제 IV.1.1. 진술의 의미를 아는 것은 그 진술을 검증하는 것으로 간주되는 바는 무엇이든지 인식할 수 있다는 것이다. 다시 말해, 결정적으로 그것을 참으로 설명하는 바를 입증할 수 있다는 것이다.(lxviii)

논제 IV.1.2. 수학적 진술이 직관적으로 참이라는 것은 그것에 대한 (직관적인) 증명이 존재할 경우이다.(lxix)

그는 어떤 산술적 진술이 검증되어 올바르게 주장되었을 때 혹은 그것이 증명가능할 경우에만 참임을 받아들인다. 하지만 U_P는 형식체계 P 내에서 증명도 반증도 가능하지 않음에도 참으로 인식된다. '증명가능성'의 의미를 형식체계 P에 의해서만 특성규정되는 것으로 여기는 이는 덤밋이 이를 받아들일 경우 이를 의아하게 생각할 수 있다. 왜냐하면 덤밋이 논제 IV.1.2를 따른다면 U_P를 참이라고 간주하기 위해서는 U_P가 참이라고 여길 수 있도록 해주는 모든 증명의 원리들이 형식체계 P에 의해 특성규정되어야 할 것처럼 보이기 때문이다. 하지만 '어떠한 형식체계도 우리가 직관적으로 받아들이는 증명의 모든 원리들을 포섭하는데 성공할 수 없는 것이 사실일 수 있다'(lxx)라는 덤밋의 언급(그리고 명제 III.2.2)을 고려하더라도 괴델 정리는 그렇지 않음을 보이는 것이라고 덤밋은 생각할 수 있다. 다시 말해, 덤밋의 입장을 따르더라도 형식체계 P 내에서는 U_P가 참이라고 여길 근거가 없음에도 불구하고 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재하는 것이고 그렇기에 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 될 수 있어 보인다는 것이다. 이러한 측면에서 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 논증은 다음과 같이 개선될 수 있을 것이다.

전제 II.1.2. 괴델 정리는 옳다.

---

56) 덤밋(2006)은 '정당화주의'(justificationism)에 대한 입장을 밝힌적 있고 이는 검증주의적 입장과는 다소 차이가 난다. 하지만 덤밋(2006)의 서문에서도 밝혔듯이 그 자신도 정당화주의 입장을 의심하고 있으므로 그의 의미론을 '검증주의 의미론'이라 부르더라도 큰 문제는 없을 것이다.

개선된 반대논증 IV.1.3 사용의미론은 옳지 않다.[57)]

임의의 주어진 형식체계 P에 대해,

(4) 만약 괴델 정리가 옳다면, P에 의해서는 그 사용이 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다.

(5) 만약 P에 의해서는 그 *사용*이 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다면, P에 의해서는 그 *의미*가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다.

(6) 만약 P에 의해서는 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다면, 사용에 의해서 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술이 존재한다.

(7) 만약 사용에 의해서 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술이 존재한다면, 사용의미론은 옳지 않다.

(8) 그러므로, 전건긍정 규칙과 전제 II.1.2에 의해, 사용의미론은 옳지 않다.

앞서 언급했듯이 괴델 정리가 옳다면, U_P는 형식체계 P에서 증명도 반증도 되지 않으므로 P 내에서는 그 사용이 설명될 수 없다고 생각될 수 있다. 그러므로 우리는 전제 (4)를 가진다. 그리고 덤밋의 입장에서 진술의 의미는 의사소통가능해야 하므로(논제 II.3.4) 진술의 사용을 통해서 설명되어야 하고 진술의 사용이 그것의 의미를 결정(논제 II.3.2)하므로 진술의 사용을 설명하는 것은 곧 그 진술의 의미를 설명하는 것으로 생각할 수 있다. 그러므로 우리는 전제 (5)를 가진다.[58)] 전제 (4)와 (5)는 덤밋의 의미론적 기획을 따르더라도

57) 여기서 괴델 정리가 사용의미론의 반례라고 제시된 논증은 1963a년도 논문에서 덤밋이 고려했던 논증이라고 보기 어려울 수 있다. 이에 대해서는 이미 3장 1절에서 다룬 바 있다. 그러므로 이를 '개선된 반대논증'이라고 부르더라도 문제가 없을 것이다. 만약 1963a년도에 덤밋이 제시한 사용의미론의 반례로써의 괴델 정리가 개선된 반대 논증 IV.1.3의 형태였다면 그는 이 논증에 대응하기 위한 직접적인 대답을 시도했어야 하나 1963a년도 논문에서 그러한 직접적인 대답을 찾아보기는 어렵다. 1994년도 논문에서 개선된 반대 논증 IV.1.3에 대응하는 듯한 논변이 펼쳐지기는 하나 이는 라이트(1994)의 논변에 대한 대응으로 봐야지 덤밋 그 자신이 고려한 반대 논증에 대한 대응이라고 볼 수는 없어 보인다. 보다 자세한 내용은 3장 1절을 참고하기 바란다.

58) "형식체계 P가 표현의 의미를 사용을 통해 설명하는 한 방식으로 고려될 수 있는가?"라는 비판에 대해서는 각주 55를 참고하라. 그리고 덤밋이 왜 형식체계 P의 구성이 '자연수' 혹은 '증명가능성'의 의미에 대한 특성규정으로 여기는가에 대해서는 2장 2절을 참고하라.

큰 무리가 없어 보인다. 그렇다면, 덤밋의 입장에서 (7)을 받아들이지 않을 여지가 있는가? 전제 (7)은 “만약 사용의미론이 옳다면, 사용에 의해서 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 진술이 존재하지 않는다”의 대우 문장이다.[59] 덤밋의 입장에서 “사용에 의해서 그 의미가 설명될 수 없는 산술적 진술”은 존재할 수가 없다. 첫째로 어떠한 의미이던 의사소통 되어야 한다는 것이 덤밋의 입장(논제 II.3.4)인데 사용에 의해 그 의미가 설명될 수 없다면 이는 의사소통 불가능하기 때문이다. 그리고 사용에 의해 그 의미가 설명될 수 없는 진술이라는 것은 사용에 의해 그 진술의 의미가 결정될 수도 없으므로 이러한 진술이 존재한다면 사용의미론은 옳지 않다는 결론에 도달할 수 있을 것이다. 그러므로 덤밋 역시 전제 (7)을 받아들일 수 있어 보인다. 문제는 전제 (6)이다. 아마도 전제 (6)은 덤밋의 입장에서 받아들이기 힘든 입장으로 생각되며 개선논증 IV.1.3을 극복하기 위해 받아들이지 않아야 할 것으로 보인다. (6)에 대한 덤밋의 입장을 고려하기 위해서는 그가 어떻게 U_P를 참인 산술적 진술로 바라볼 수 있는지부터 알아 볼 필요가 있다. 왜냐하면 U_P가 사용에 의해 설명되어야 하는 이유는 그것이 의미를 지닌다고 여겨지기 때문이며 U_P가 의미를 지닌다고 여겨지는 가장 큰 이유는 그것이 참으로 인식된다는 점이기 때문이다. 다시 말해, 덤밋이 U_P를 참도 거짓도 아닌 진술로 받아들이고 U_P가 의미를 지니지 않은 진술이라고 여긴다면, 개선논증 IV.1.3은 사용의미론에 대한 위협으로 고려될 필요가 없을 것이다. 하지만 문제는 덤밋이 U_P를 참으로 인식되는 진술로 받아들인다는데 있다. 또한 덤밋이 (6)을 받아들이지 않는 한 가지 가능한 방식은 형식체계 P에 의해서는 U_P의 사용이 설명될 수 없지만 우리는 U_P의 사용을 설명할 수 있다고 주장하는 것이다. 이러한 입장은 형식체계 P의 일관성이 P 내에서 증명될 수 없고 그렇기에 U_P가 참임이 P에 의해서는 보여질 수 없지만 우리는 P의 일관성을 인식할 수 있고 그렇기에 U_P가 참임을 인식할 수 있듯이 U_P의 사용도 동일한 방향에서 고려할 수 있다고 주장할 수 있다. 그렇다면 덤밋이 U_P를 참으로 인식된 진술로

59) 엄밀히 말해, 직관주의자들은 이를 전제 (7)의 대우 문장으로 받아들이지 않을 수 있다. 왜냐하면 “어떤 진술이 존재하지 않는다”가 증명되지 않았다고 해서 그러한 진술이 존재하는 것은 아니기 때문이다. 하지만 이를 전제 (7)의 대우 문장으로 받아들이지 않더라도 논제 II.3.2를 받아들이는 한 올바른 문장으로 수용할 수 있을 것이다.

바라본다고 할 때, 이러한 그의 설명은 개선논증의 전제 (6)을 받아들이지 않을 근거로 충분한가?

2. 예상되는 덤밋의 대응

덤밋의 입장에서 개선된 반대논증을 부정하기 위해서는 전제 (6)을 부정해야 하고 아마도 그것이 유일한 방안으로 보인다. 그리고 덤밋이 U_P를 참으로 인식되는 진술로 여긴다는 측면은 U_P 역시 의미를 지니며 사용에 의해 그 의미가 설명되어야 할 진술임을 말해 준다. 그러므로 (6)에 대한 덤밋의 입장을 예상해 보기 위해서는 그가 어떻게 U_P를 참으로 인식되는 진술로 고려할 수 있는가에 대해 알 필요가 있다. 이 문제에 대해 간략하게 언급하고 전제 (6)에 대한 논의로 넘어가자.

먼저 일반적으로 U_P는 어떻게 참인 산술적 진술로 고려되는가? U_P는 원초 회기 함수와 부호화(coding)과정을 통해 회기적으로 정의된 식이 모든 자연수에 대해 보편양화된 형태를 띠고 있다. 이를 조금 더 자세히 살펴보자. 우리는 형식체계 P의 언어에서 'x는 페아노 산수의 공리들로 부터 얻는 z의 도출이다'(lxxi)를 표현한 함수 $Prv(x, z)$를 회기적으로 정의할 수 있다. 그리고 U_P는 "하나의 자유변항을 포함하는 임의의 식 $\varphi(x)$에 대해, $\vdash \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \leftrightarrow \psi$인 문장 ψ가 존재한다"(lxxii)를 증명함으로써 얻을 수 있다.[60] 여기서 φ에 $\neg \exists x Prv(x, \overline{\ulcorner \psi \urcorner})$를 적용함으로써 우리는 $\neg \exists x Prv(x, \overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \leftrightarrow \psi$을 얻을 수 있다. 그리고 $\neg \exists x F(x)$와 $\forall x \neg F(x)$가 동치일 때, 우리는 $\forall x \neg Prv(x, \overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \leftrightarrow \psi$를 얻는다. 여기서 ψ가 P에서 증명도 반증도 되지 않는 식(혹은 산술적 진술) U_P이므로 편의상 이를 $\forall x \neg Prv(x, \overline{\ulcorner U_P \urcorner})$와 같이 적도록 하자. $\neg Prv(x, \overline{\ulcorner U_P \urcorner})$는 회기적이다. 그리고 보편양화의 변항이 제한되지 않더라도 형식체계 P에 대한 건전성(soundness)이 증명될 경우 $\forall x \neg Prv(x, \overline{\ulcorner U_P \urcorner})$는 참 값을 할당 받을 수 있다. 건전성 증명은 수학적 귀납법을 통해 주어질 수 있다. 예를 들어, $True_P$라는 속성을 P에 수학적 귀납

60) 여기서 $\ulcorner \varphi \urcorner$는 φ의 괴델수를 지칭하며 $\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}$는 φ의 괴델수의 이름을 지칭한다.

법을 통해 적용하면 수학적 귀납법의 타당성에 의해 P로부터 도출된 모든 산술적 진술들 φ는 $True_P(\varphi)$라는 속성을 지닐 수 있게 된다. 이러한 과정이 마무리되면 우리는 P에서는 표현되지 않지만 참인 산술적 진술 U_P의 속성인 $True_{P+}(U_P)$를 정의할 수 있게 되고 다시 이 속성에 수학적 귀납법을 적용하여 U_P가 참이라는 결론을 얻을 수 있다.

그렇다면 덤밋은 어떻게 U_P를 참이라고 생각하는가? 먼저 U_P가 동시에 참이면서 거짓이지 않아야 할 뿐만 아니라 P로부터 어떤 산술적 진술 φ와 $\neg\varphi$가 동시에 증명되지 않기 위해서는 P가 일관적이어야 한다. 그러므로 덤밋(1963a, p.192)은 P가 일관적이라는 가설(hypothesis)하에서 U_P가 참임을 고려하기에 "만약 P가 일관적이라면, U_P는 참이다"를 받아들인다. 그러므로 그가 U_P를 참으로 받아들이기 위해서는 P가 일관적임을 받아들여야 할 것이다. 이제 다시 개선논증 전제 (6)에 대한 논의로 넘어가자.

개선논증의 전제 (6)을 받아들이지 않기 위해 덤밋이 취할 예상되는 대응은 형식체계 P에 의해 U_P의 사용이 설명될 수 없다고 해서 그 이외의 방식을 통해서도 설명될 수 없는 것은 아니라고 말하는 것이다. 말하자면, (6)이 옳은 전제로 받아들여지기 위해서는 앞서 3장 2절에서 언급된 전제 III.2.3와 유사한 다음과 같은 전제가 필요할 것이나 이를 전제함은 옳지 않다고 주장하는 것이다.[61]

전제 IV.2.1. U_P의 의미(혹은 사용)를 이해하는 가장 적합한 방식은 형식체계 P 혹은 그것의 확장에 의한 것이다.

61) 이러한 입장이 3장 4절에서 제시한 입장과 상충되는 것은 아니다. 3장 4절에서는 "'자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는가?"에 대한 것이 논의의 핵심이었다. 그리고 전제 III.2.3을 그가 받아들이던 받아들이지 않던 그가 형식체계 이외의 방식에 의해서 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되리라는 생각을 가지기 힘들 것이라는 언급이었다. 하지만 여기서의 논의는 '자연수'의 의미에 대한 완전한 특성규정이 아니라 U_P의 의미가 사용에 의해 설명되는 가다. 어떠한 형식체계 P의 확장에 의해서도 '자연수'의 의미는 완전히 특성규정할 수 없겠지만 우리는 U_P를 도출하는 (그래서 사용하는) P의 확장된 형식체계 $P+$를 얼마든지 고려할 수 있다. 그러므로 전제 IV.2.1을 받아들여야하는가에 대한 논의와 전제 III.2.3을 받아들여야 하는가에 대한 논의는 서로 구별될 수 있을 것이다.

덤밋은 아마도 형식체계 P는 그 자신이 일관적임에 대해 인지할 아무런 설명도 지니지 못할 것이나 우리 인간은 아니라고 주장할 수 있다. 그리고 이를 통해 전제 IV.2.1을 부정할 수 있다. 왜냐하면 실제로 덤밋(1994, p.336)은 '주어진 체계 $[P]$에 대해, $[U_P]$를 구성하는 것은 기계적인 절차이고 $[P]$를 직관적으로 올바르다고 인식하는 것은 그렇지 않으므로 만약 우리가 $[U_P]$를 참이라 고려할 이유가 있다면 이는 필수적이다'(lxxiii)라고 언급한 바 있기 때문이다. 이는 최소한 우리는 형식체계 P의 공리를 참으로 받아들일 수 있을 뿐만 아니라 P가 사용하는 추론규칙들이 올바름을 받아들임으로써 P가 일관적임에 대한 표준 증명62)을 얻을 수 있는 효과적인 방법63)을 지니고 있으나 형식체계 P는 그렇지 않다는 설명으로 해석될 수 있다. 다시 말해, 우리는 P나 그것의 확장들인 $P_1, \ldots, P_n$들 각각이 일관적임에 대한 예증(demonstration)을 가지고 그래서 U_P나 $U_{P_1}, \ldots, U_{P_n}$들 각각이 참임에 대한 예증을 가질 수 있으나 형식체계 P나 그것의 확장들인 $P_1, \ldots, P_n$들은 그러한 예증조차도 가질 수 없으므로 전제 IV.2.1은 옳지 않고 그렇기에 전제 (6)의 전건이 후건을 함축하지는 않는다는 것이다. 하지만 이러한 대답은 두 가지 방향에서 만족스럽지 않다.

첫째로, 이러한 대답은 '의미'라는 표현을 적용하는 기준이 누가 그것을 인지하느냐에 따라 달라질 수 있고 이 경우 최소한 '의미'의 의미에 대한

---

62) 덤밋(1973, p. 240)은 표준 증명(canonical proof)과 예증(demonstration)을 구분한다. 그는 "$10^{10^{10}}+1$는 합성수이거나 소수이다"와 같은 문장은 $10^{10^{10}}+1$이 합성수에 대한 증명이 존재하거나 소수임에 대한 증명이 존재하지 않음에도 참인 것으로 주장된다고 말한다. 그리고 그는 어떤 진술이 표준 증명을 가지는 상황과 그 진술의 주장가능성에 대한 설득력있는 논증(cogent argument)이 있는 상황을 구별하며 후자를 "예증"이 존재하는 경우로 설명한다. 그에 따르면 예증은 그 자체로는 증명은 아니며 표준 증명을 얻을 수 있는 효과적인 방법을 제시해 주는 것이라고 한다. 또한 덤밋(1973, pp. 243-244)은 어떤 수학적 진술에 대한 표준 증명이 존재하거나 그에 대한 예증이 존재할 경우, 그 진술을 참으로 주장할 수 있을 것이라고 말하며 이러한 입장이 직관주의에 위배되지 않을 것임을 설명한다.

63) 덤밋(1973)이 표준 증명과 예증을 구분하면서 '효과적인 방법'의 예시로 들었던 것은 기계적인 절차(mechanical process)였다. 만약 효과적인 방법이 기계적인 절차에 의한 것들만으로 고려된다면 이 부분에 대한 필자의 해석은 잘못된 것이라 할 수 있다. 하지만 어떠한(any) 단일한 형식체계로도 모든 증명의 원리들을 포섭할 수 없다는 덤밋의 입장(명제 III.2.2)에 있어 표준 증명이 지닌 원리를 찾는 방법이 기계적인 절차에만 국한되어 있다는 생각은 그의 입장에 모순되는 해석일 수 있다.

서로 다른 주장이 제기됨으로써 사용의미론이 옳은가에 대한 적절한 논의가 진행되기 어려울 수 있다.64) 예를 들어, 형식체계 P를 확장한 인공지능 컴퓨터AI_P가 있다고 고려해 보자. 이 AI_P는 형식체계 P를 포함한 확장이니 괴델 정리가 항상 적용될 수 있다. 이때, AI_P에서는 U_{AI_P}가 증명도 반증도 되지 않으니 AI_P는 U_{AI_P}가 존재함에 대한 어떠한 인식도 하지 못할 수 있다. 다시 말해, AI_P에 있어서 U_{AI_P}는 사용될 수 없으니 U_{AI_P}의 의미는 AI_P의 사용에 의해 결정되지도 사용을 결정하지도 않는다는 해석이 가능하다. 즉, 이는 덤밋의 논제 II.3.2에 위배되며 사용될 수 없으니 의사소통 가능하지도 않으므로 논제 II.3.4에도 위배된다. 그러므로 U_{AI_P}의 의미는 AI_P에 있어서는 의미로 고려되지 않아야 한다는 결론에 도달할 수 있다. 하지만 우리는 U_{AI_P}를 의미 없는 진술로 고려하지 않을 것이다. 같은 방식으로 우리가 참으로 인식할 수도 사용할 수도 없지만 우리 보다 월등한 인지능력 – 예를 들어 덤밋(2006, 8장)이 주장하는 신의 인지능력 –을 지닌 생명체는 그것을 참으로 인식하며 또한 사용할 수 있는 그러한 진술의 의미가 존재한다고 생각해 보자. 우리는 그러한 의미를 진술의 사용을 통해 의사소통할 수도 없고 사용할 수 없으니 그것의 의미는 우리의 사용에 의해 결정될 수도 없다. 그러므로 이 또한 논제 II.3.2와 논제 II.3.4에 위배된다. 그러므로 이러한 것은 의미로 고려되어서는 안 된다. 하지만 이러한 논리라면 U_{AI_P}의 의미는 AI_P에서는 인지되지 않을 수 있는데 그것은 왜 의미로 인정해야 하느냐고 되물을 수 있다. 정리하자면, 덤밋은 '사용'(use)과 '의사소통가능'(communicable)과 같은 용어를 통해 '의미'(meaning)를 규정하는데 이 경우 그러한 용어들이 적용되는 주체의 인지능력에 따라 '의미'라고 부르는 대상들 혹은 그것을 나타내는 방식들의 전체가 달라질 수 있다는 것이다. 만약 이것이 사실이라면 '의미'의 의미에 관한 적절한 합의가 있어야 사용의미론이 옳은지 옳지 않은지에 대해 제대로 논의할 수 있을 것이다.

둘째로, 2장과 3장에서도 언급되었듯이 '자연수'의 의미에 관한 적합

64) 기본적으로 이러한 물음은 '사용'이란 용어가 굉장히 애매하게 사용됨을 지적하는 것이다. 유사한 방향에서 이러한 문제는 사용의 주체가 누구냐에 대한 문제를 야기한다. "어떤 진술의 사용을 통해 그 진술의 의미가 설명되어야 한다"는 주장은 그러한 진술을 누가 사용하느냐에 따라 받아들여지지 않을 수도 있다.

한 설명방식은 적어도 참인 순수히 산술적인 진술들을 (효과적으로) 나열하는 증명의 원리에 대한 설명이 포함되어야 한다. 그리고 명제 III.2.2를 통해 덤밋이 주장하듯 그는 어떠한(any) 형식체계 P도 직관적으로 받아들여야 할 증명의 모든 원리를 한번에 완전히 특성규정할 수 없다는 입장을 지닌다. 여기서 문제는, 전제 IV.2.1을 부정함으로써 개선논증 IV.1.3의 전제 (6)을 부정하기 위해서는 형식체계 P가 특성규정하지 못하는 어떤(some) 증명의 원리를 우리 인간은 특성규정할 수 있음이 보여져야 한다는 것이다. 예를 들어, 형식체계 P의 확장인 인공지능 컴퓨터 AI_P는 그 자신이 일관적임에 대한 어떠한 예증도 갖지 못하지만 우리 인간은 그러한 예증을 가진다고 주장한다면 어떻게 그럴 수 있는가에 대한 설명이 필요하다. 만약 여기에 대해 증명이라는 것은 단순한 기계적인 절차가 아닌 창의적인 요소(creative component)가 필요한 것인데 AI_P의 어떠한 부분도 그러한 창의적인 요소를 특성규정하지 않는다고 주장할 수 있다.[65] 하지만 이러한 주장 역시 창의적 요소가 무엇이며 그것을 AI_P나 그것의 확장은 지니지 않지만 우리는 지니고 있음을 설명해야 한다. 또한, 우리만이 지닌 창의적 요소가 어떻게 작용하여 AI_P의 일관성에 대한 예증을 지닐 수 있게 해주는지가 설명되어야 전제 IV.2.1이 부정되고 전제 (6) 역시도 부정된다고 말할 수 있을 것이다. 이러한 문제는 형식체계 P에 대한 문제가 인공지능에 대한 문제로 확장된 것이다. 거칠게 말하자면, "기계가 '증명가능성'의 의미를 이해할 수 있는가?"라는 물음과 관련될 수 있다. 만약 인공지능이 형식체계 P가 확장된 형태인 AI_P라면 그래서 인간이 지니는 창의적 요소 역시 지니게 되어 인간이 이해하고 특성규정 할 수 있는 모든 증명의 원리를 AI_P도 이해하고 특성규정할 수 있다면 전제 IV.2.1은 부정될 수 없을 것이다. 전제 IV.2.1이 부정되지 못한다면 전제 (6)이 부정될 수 없고 그렇다면 개선 논증 역시 부정될 수 없다. 라이트(1994)는 수학자들의 마음의 작용(the workings of the mathematician's mind)이 전적으로 기계적 알고리즘에 의해 작동하지 않다는 루카스(Lucas, J. R., 1963)와 펜로스(Penrose, R.,1989, pp.

65) 실제로 덤밋은 덤밋(1991a)의 4장과 덤밋(1991b)의 9장에서 연역적 추론(deductive reasoning)이나 증명이 단순한 기계적 절차가 아니며 창의적 요소를 필요로 한다고 주장한다. 물론 그가 형식체계가 그러한 것을 지니지 못한다는 주장을 했던 것은 아니나 그의 주장을 확장해 이를 하나의 가능한 해석으로 고려할 수는 있을 것이다.

538-539)의 논증 소개하며 ‘증명가능성’의 의미에 대한 덤밋의 입장이 루카스/펜로스의 논증에 대한 고려를 요구할 것이라고 지적한다. 물론 이에 대해 덤밋(1994, p.334)은 그러한 문제는 실제로 인공지능이 만들어지면 그 때에 가서야 논의할 수 있는 문제라며 라이트가 성급했다고 말한다. 하지만 적어도 이 글의 논지에서 덤밋이 이에 대해 대답하지 못한다면 전제 IV.2.1은 부정될 수 없을 것이며 그러므로 개선논증도 부정될 수 없을 것이다. 즉, 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 아님을 주장하기 위해 덤밋은 이에 대해 대답할 의무가 있는 것이다. 그러므로 개선논증에 반박하기 위해서도 이와 같은 물음을 제기하는 것은 전혀 성급한 일만은 아닐 것이다.

V. 나가며

지금까지 필자는 "괴델 정리가 덤밋의 사용의미론에 반례인가?"에 대한 대답을 제시하기 위해 덤밋의 입장을 살펴보고 이에 대해 제기될 수 있는 몇 가지 의문들을 차례로 살펴보았다.

3장 1절에서 필자는 오해할 수 있는 몇 가지 괴델 정리에 대한 덤밋의 입장을 다루었다. 만약 이러한 필자의 지적이 옳다면 덤밋이 고려했던 "괴델 정리가 사용의미론에 반례라는 입장"은 반대논증 II.1.3의 형태가 더 올바르다고 할 수 있을 것이다. 그리고 이 논증을 극복하기 위한 덤밋의 주요한 전략은 논증의 전제 (2)인 "만약 '자연수'의 의미가 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다면, 사용의미론은 옳지 않다"를 부정하는 것이었다. 2장과 3장에서 필자가 해석한 그의 대응 방안은 '자연수'의 의미는 무한정 확장가능하기 때문에 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 것이었다. 다시 말해, 덤밋은 '자연수'의 의미는 애초에 완전히 특성규정되지 않는 것이기 때문에 이러한 사실이 사용의미론이 옳냐 그르냐에 아무런 영향도 미치지 못한다고 생각하는 것이다. 하지만 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다면 이러한 덤밋의 입장은 반박까지는 아니더라도 최소한 재고될 수 있다. 그래서 "'자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다"고 고려할 가능한 입장에 대해 2장에서 다루었다. 필자는 "'자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다"는 입장이 2차 논리를 허용하는 이들로 부터 제기될 수 있음을 고려했었고 2차 논리의 사용을 허용하는 입장은 덤밋에게 의미론적 실재론 혹은 플라톤주의로 고려될 수 있음을 언급했었다. 특히 2차 논리를 허용하는 입장은 순수히 산술적인 진술들을 참으로 만족시켜줄 수학적 구조물이 존재한다고 여기는 측면에서 플라톤주의에 가까운데 이러한 방향에서 덤밋의 플라톤주의에 대한 대응을 살펴봄으로써 그가 "'자연수'의 의미가 완전히 특성규정된다"는 이들의 입장에 대해 어떻게 대응할지에 대해 살펴보았다. 필자는 2차 논리를 허용하는 입장과 덤밋의 가장 큰 차이는 "모든 사용가능한 의미론은 유한한 기초를 지닌다"는 덤밋의 논제 II.3.6에 있다고 고려했고 또한 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않음에 대한 덤밋의 입장이 괴델 정리의 결과에 의존해 있음을 설명했다.

그리고 괴델 정리는 어떠한 형식체계 P에 의해서도 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않음을 보인 것이므로 이를 통해 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않음을 보이기 위해서는 형식체계 P에 의해서만 안 된다는 것인지 그 이외의 방식에 의해서도 안 된다는 것인지를 밝힐 필요가 있음을 언급했다. 다시 말해, 이는 전제 IV.2.1인 "'자연수'의 의미에 관한 가장 적합한 설명(특성규정) 방식은 형식체계 P에 의한 방식이다"에 대한 평가에 따라 달라질 수 있음을 언급했고 이에 대해 최대한 다뤄 본 것이 3장의 2절, 3절 그리고 4절이었다.

전제 IV.2.1에 대해 평가하기 위해서는 '적합한 특성규정 방식'이 어떤 것인지를 고려해야 했으므로 적어도 더 적합한 특성규정 방식이라는 것은 특성규정의 대상이 되는 표현을 보다 더 명시적으로 규정하며 만약 더 적합한 특성규정 방식에 의해 그 표현이 완전히 특성규정되지 않는다면 덜 적합한 특성규정 방식에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다는 측면은 포함해야 할 것으로 고려했다.(전제 III.2.5) 이러한 하에서, 형식체계 P 보다 더 적합한 특성규정 방식이 형식체계일 수 있는가를 3장 3절에서 고려했고 최소한 '자연수'의 의미를 특성규정하는 방식이라면 최소한의 참인 순수히 산술적 진술들을 규정하는 원리(공리) 및 추론 규칙을 포함해야 할 것이므로 형식체계 P를 항상 포함해야 할 것이라 고려했다. 즉, 어떠한 형식체계이던지 '자연수'의 의미를 특성규정해야 한다면 형식체계 P를 포함해야 할 것이고 이 경우 괴델 정리가 항상 적용될 수밖에 없음을 고려했다. 남은 것은 더 적합한 특성규정 방식이 형식체계가 아닌 경우였다.

형식체계에 의해 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는 것은 알겠는데 형식체계가 아닌 방식에 의해서도 안 되는 것인가? 하지만 이에 대한 논의는 형식체계가 아닌 다른 방식이 무엇인지에 대한 논의를 요구하고 그에 대한 논의는 필자의 역량을 넘어서므로 최소한 덤밋이 이러한 물음에 어떠한 입장을 지니는지를 평가해 보기로 했었다. 이에 대해 평가해 볼 수 있는 단서로 필자는 '증명가능성'에 대한 덤밋의 입장을 살펴보았다. 왜냐하면 '자연수'의 의미에 대해 특성규정할 때, 덤밋은 모든 자연수에 대한 참인 순수히 산술적 진술들을 도출하는 증명의 원리에 대한 특성규정 역시 요구하는 것으로

보이기 때문이다. 다시 말해, '증명가능성'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다면 '자연수'의 의미 역시 완전히 특성규정되지 않는다고 여길 수 있기 때문에 '증명가능성'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다고 여기는 이유를 찾음으로써 전제 IV.2.1에 대한 덤밋의 입장을 평가해 볼 수 있다고 생각했었다. 주된 분석은 "'증명가능성'의 의미가 비형식적이다"라고 고려하는 그의 입장이었다. 만약 이 말의 의미가 어떤 비형식적 방식이 있어서 그러한 방식으로는 '증명가능성'의 의미를 완전히 특성규정할 수 있다는 것이 된다면 그는 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정될 여지도 고려해야 할 것이다. 하지만 3장에서 필자는 덤밋이나 직관주의자들이 ''증명가능성'의 의미가 비형식적이다'라고 하는 말의 의미는 그 표현의 의미가 완전히 형식화될 수 없음을 말하는 것 이상은 아니라고 결론 내렸다. 다시 말해, 직관주의나 덤밋의 입장을 따를 때 '자연수'의 의미가 형식체계 이외의 방식을 통해 완전히 특성규정된다는 입장을 고려하기는 힘들어 보인다는 것이다.

이러한 결론을 이끄는 과정에서 필자는 덤밋이 왜 '자연수'의 의미가 완전히 특성규정되지 않는다고 여겼는지에 대해 고려했다. 간단히 말하자면 덤밋의 입장은 우리는 '자연수'의 의미에 대해 막연히 직관적으로 이해하고 '자연수'의 의미는 완전히 명확하지 않은데 반해 그것을 특성규정하는 방식은 보다 한정적이기에 완전히 특성규정하지 못한다는 것으로 보인다고 결론내렸다. 즉, '자연수'의 의미가 무한정 확장가능하기 때문에 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 입장이다. 그러므로 필자는 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않음에 대한 평가는 "'자연수'의 의미가 무한정 확장가능하다"에 대한 평가가 적절히 제시되어야 가능하다고 결론지었다.

정리하자면, 덤밋은 반대논증 II.1.3을 받아들이지 않기 위해 전제 (2)를 부정했다. 그는 전제 (2)에 대해 '자연수'의 의미는 애초에 완전히 특성규정되지 않고 그렇기에 사용의미론이 옳냐 그르냐와는 무관하다고 고려했다. 하지만 '자연수'의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 그의 입장은 재고될 여지가 있다. 그리고 이에 대한 평가를 위해서는 '자연수'의 의미가 무한정확장가능하다는 입장에 대해 적절히 평가해야 한다는 것이다.

마지막으로 필자는 덤밋의 입장을 동정적으로 받아들여 그가 반대논

증 II.1.3을 극복했다고 하더라도 괴델 정리가 그의 사용의미론에 반례가 될 수 있는 경우를 고려했다. 필자는 4장에서 개선된 반대 논증을 제시했다. 그리고 이 논증을 덤밋이 극복하기 위해서는 전제 (6)인 “만약 P에 의해서는 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다면, 사용에 의해서 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술이 존재한다”를 부정해야 하는데 이를 위해서는 보다 세부적인 설명이 필요함을 지적했다. 이에 대해 덤밋은 형식체계 P에 의해서는 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 U_P가 존재하되 우리 인간은 U_P가 참임에 대한 예증을 지니므로 (6)을 받아들일 필요가 없다고 말할 수 있으나 이러한 설명은 두 가지 문제가 있다고 필자는 지적했다. 첫째로, ‘의미’라는 표현의 적용기준이 그것을 인지하는 주체의 인지 능력에 따라 차이가 날 수 있음을 지적했다. 예를 들어, 형식체계 P를 확장한 인공지능 컴퓨터 AI_P에서 U_{AI_P}의 의미는 의사소통되지 않을 것이므로 논제 II.3.4에 위배된다. 즉, AI_P에게 U_{AI_P}의 의미는 의미가 아닌 것이 된다. 하지만 우리는 U_{AI_P}가 의미를 지니지 않는다고 고려하지 않는다. 즉, 덤밋이 (6)을 부정하려면 ‘의미’의 적용 기준에 대한 최소한의 합의가 필요하나 이에 대한 덤밋의 설명은 찾아 볼 수 없다는 것이었다. 둘째로, 형식체계 P에 의해서는 의미가 설명될 수 없지만 우리 인간에 의해서는 그것이 설명될 수 있다면 그것이 왜 그런지에 대해 설명해야 한다. 이에 대해 덤밋은 그러한 인공지능이 만들어 지면 가능할 것이라고만 언급한다. 하지만 이 문제가 해결되지 않는 한 덤밋이 전제 (6)을 극복했다고 할 수 없을 것이며 그렇기에 개선된 반대 논증 IV.1.3에 대해 대답했다고 볼 수 없고 그럼으로써 괴델 정리가 사용의미론의 반례가 아니라는 그의 주장은 재고될 여지가 여전히 있다고 할 것이다.

최종적으로 정리해서, 이 글에서 필자는 괴델 정리가 사용의미론의 반례라는 덤밋의 입장을 살펴보고 이를 극복하는 그의 입장이 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않는다는 입장에 기대어 있음을 설명했다. 또한 ‘자연수’의 의미가 애초에 완전히 특성규정되지 않음을 보이기 위해서는 ‘자연수’의 의미가 무한정 확장가능함에 대한 논의가 필요함을 언급했다. 마지막으로 덤밋의 이러한 각 입장들을 고려하더라도 우리는 개선된 반대 논증 IV.1.3

을 통해 괴델 정리가 그의 사용의미론에 반례로 고려될 수 있음을 언급했다. 개선 논증 IV.1.3을 극복하기 위해서 덤밋은 우리가 공통적으로 이해할 수 있는 '의미'의 의미에 대한 설명을 제시해야 할 것이며 형식체계 P의 확장인 인공지능 컴퓨터 AI_P에서는 인식을 하지 못하는 U_{AI_P}의 의미를 우리가 어떻게 알 수 있는지에 대해 설명해야 할 것이다.

참고 문헌

정인교 (2009a), “악순환 원리와 비서술성”, 『철학적 분석』, 제 20호 겨울.

정인교 (2009b), “무한정 확장가능성과 양화”, 『철학연구』, 38집, pp. 213-249.

Auxier, R. and Hahn, L. E. (2007), ed. *The philosophy of Michael Dummett*, The Library of Living Philosophers.

Benaceraff, P. and Putnam, H. (1964), *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall.

Boolos, G. (1984), “To Be is to Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables)”, reprinted in Boolos(1998), Harvard University Press, pp. 54-72.

Boolos, G. (1985), “Nominalist Platonism”, reprinted in Boolos(1998), Harvard University Press, pp. 73-87.

Boolos, G. (1998), *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press.

Boolos, G. S., Burgess J. P., Jeffrey, R. C. (2003), *Computability and Logic*, Cambridge University Press.

Brandl, J. L. and Sullivan, P. (1998), ed., *New Essays on the Philosophy of Michael Dummett*, Rodopi B.V. editions.

Brouwer, L. E. J. (1905), “Life, Art and Mysticism” reprinted in Heyting (1975), ed., Amsterdam, pp. 1-10.

Brouwer, L. E. J. (1907), “On the Foundations of Mathematics” reprinted in Heyting (1975), ed., Amsterdam, pp. 13-101.

Brouwer, L. E. J. (1912), “Intuitionism and Formalism” reprinted in Heyting (1975), ed., Amsterdam, pp. 123-138.

Brouwer, L. E. J. (1948), “Consciousness, Philosophy, and Mathematics” reprinted in Heyting (1975), ed., Amsterdam, pp. 480-494.

Dales, H. G. and Oliveri, G. (1998), *Truth in Mathematics*, Oxford University Press.

Davis, M. (1958/1973), *Computability and Unsolvability*, Dover Publications.

Dawson, J.W., Jr.(1997), *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, Massachusetts Wellesley.

Dedekind, R. (1888), *What Are Numbers and What Should They Be?*, translated by Pogorzelski, H., Ryan, W. and Snyder, W., Research Institute for Mathematics, 1995.

Detlefsen, M. (1992), *Proof, Logic and Formalization*, Routledge Press.

Devitt, M. (1984), *Realism and Truth*, Princeton University Press.

Dummett, M. (1959a), "Truth" reprinted in Dummett(1978), pp. 1-24, Harvard University Press.

Dummett, M. (1959b), "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" reprinted in Dummett(1978), pp. 166-185, Harvard University Press.

Dummett, M. (1963a), "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem" reprinted in Dummett(1978), pp. 186-201, Harvard University Press.

Dummett, M. (1963b), "Realism" reprinted in Dummett(1978), pp. 145-165, Harvard University Press.

Dummett, M. (1967), "Platonism" reprinted in Dummett (1978), pp. 202-214, Harvard University Press.

Dummett, M. (1973), "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" reprinted in Dummett(1978), pp. 215-247, Harvard University Press.

Dummett, M. (1973/1981), *Frege: Philosophy of Language*, Harvard University Press.

Dummett, M. (1975a), "Frege's Distinction between Sense and Reference" reprinted in Dummett(1978), pp. 116-144, Harvard University Press.

Dummett, M. (1975b), "Can Analytical Philosophy be Systematic, and Ought it to Be?" reprinted in Dummett(1978), pp. 437-458, Harvard University Press.

Dummett, M. (1978), *Truth and Other Enigmas*, Harvard University Press.

Dummett, M. (1991a), *Frege: Philosophy of Mathematics*, Harvard

University Press.

Dummett, M. (1991b), *Logical Basis of Metaphysics*, Harvard University Press.

Dummett, M. (1991c), "What is mathematics About?" reprinted in Dummett(1993), pp. 429-445 and in George(1994), pp. 11-26, Oxford University Press.

Dummett, M. (1993), *The Seas of Language*, Oxford University Press.

Dummett, M. (1994), "Reply to Wright" reprinted in McGuiness, B. and Oliveri, G. (1994), ed., Kluwer Academic Publishers, pp. 329-338.

Dummett, M. (2000), *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press.

Dummett, M. (2006), *Thought and Reality*, Oxford University Press.

Dummett, M. (2007), "Intellectual Autobiography" reprinted in Auxier & Hahn (2007), The Library of Living Philosophers, pp. 3-32.

Dummett, M. (2010), *The Nature and Future of Philosophy*, Columbia University Press.

Eves, H. (1990), *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, 3rd ed., Dover Publications.

Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., Heijenoort, J. V. (1986), ed. *Kurt Gödel Collected Works: Volume I Publications 1929-1936*, Oxford University Press.

Frege, G. (1884), *The Foundations of Arithmetic*, English translated by J. L. Austin, Northwestern University Press, Sixth printing, 1950/1999.

Franzén, T. (2004), *Inexhaustibility: A non-exhaustive treatment*, Association for Symbolic Logic.

George A. (1994), ed., *Mathematics and Mind*, Oxford University Press.

Gentzen, G. (1936), "The consistency of elementary number theory," *The Collected Works of Gerhard Gentzen*, (ed.) Szabo, M. E., North-Holland, 1969.

Gödel, K. (1930), "The Completeness of the Axiom of the Axioms of the Functional Calculus of Logic" reprinted in Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., Heijenoort, J. V. (1986), Oxford University Press, pp. 103-123.

Gödel, K. (1931), “On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I” reprinted in Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., Heijenoort, J. V. (1986), Oxford University Press, pp. 144-195.

George, A. and Velleman, D. J. (1998), “Two Conceptions of Natural Number” reprinted in Dales, H. G. and Oliveri, G. (1998), ed., Oxford University Press, pp. 311-327.

Heyting, A. (1956/1971), *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland Publishing Company-Amsterdam.

Heyting, A. (1975), ed., *Collected Works*, Vol. I: *Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam.

Hrbacek, K. and Jech, T. (1999), *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker.

Löwenheim, L. (1915), “On Possibilities in the Calculus of Relatives” reprinted in Heijenoort(1999), ed., iUniverse, pp. 228-251.

Lucas, J.R., (1963), "Minds, Machines and Gödel," Philosophy, Vol. no. 36, pp. 112-137.

McCarty, C. and Tennant, N. (1987), “Skolem's Paradox and Constructivism”, *Journal of Philosophical Logic*, 16, pp. 165-202.

McGuiness, B. and Oliveri, G. (1994), ed., *The Philosophy of Michael Dummett*, Kluwer Academic Publishers.

Moore, A. W. (1998), “More on “The Philosophical Significance of Gödel's Theorem”” reprinted in Brandl, J. L. and Sullivan, P. (1998), ed., Rodopi B.V. Editions, pp. 103-126.

Parsons, C. (1992), “The Impredicativity of Induction” reprinted in Detlefsen, M. (1992), ed., Routledge Press, pp. 139-161.

Peano, G. (1889), “The Principles of Arithmetic, presented by a new method” reprinted in Heijenoort(1999), ed., iUniverse, pp. 83-97.

Penrose, R. (1989), *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press.
Shapiro, S. (1991/2002), *Foundation without Foundationism*, Oxford University press.
Shapiro, S. (1996), ed., *The Limits of Logic: Higher-Order Logic and the Löwenheim-Skolem Theorem*, Dartmouth.
Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University press.
Shapiro, S. (1998), "Induction and Indefinite Extensibility: The Gödel Sentence is True, but Did Someone Change the Subject?", *Mind*, Vol. 107, pp. 597-624.
Shapiro, S. (2009), "Classical Logic", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*(http://plato.stanford.edu/entries/logic-classical/), the Metaphysics Research Lab: Center for the Study of Language and Information, Stanford University.
Skolem, T. (1922), "Some Remarks on Axiomatized Set Theory" reprinted in Heijenoort(1999), ed., iUniverse, pp. 290-301.
Troelstra, A. S. (1991), "A History of Constructivism in the 20th Century", University of Amsterdam, ITLI Prepublication Series ML-91-05, http://staff.science.uva.nl/~anne/hhhist.pdf.
Troelstra, A. S. and Schwichtenberg, H. (2000), *Basic Proof Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press.
Tsui-James, E. P. (1998), "Dummett, Brouwer and the Metaphysics of Mathematics" reprinted in Brandl, J. L. and Sullivan, P. (1998), ed., Rodopi B.V. Editions, pp. 143-168.
Van Dalen, D. (2003), *Logic and Structure*, 4th ed., Springer.
Van Heijenoort, J. (1999), ed., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, iUniverse.
Von Neumann, J. (1931), "The Formalist Foundations of Mathematics" reprinted in Benacerraf, P. and Putnam, H. (1964), Prentice-Hall, pp. 50-54.

Wang, H. (1957), “The Axiomatization of Arithmetic”, *the Journal of Symbolic Logic,* Vol. 22, No. 2, pp. 145-158.

Wright, C. (1994), “About "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem": Some Issues” in McGuiness, B. and Oliveri, G. (1994), ed., Kluwer Academic Publishers, pp. 167-202.

부록(Appendix) I. 주요 논제 및 논증 모음

명제 II.1.1. 산수에 관한 어떠한 직관적으로 올바른 단일한 형식체계에 의해서도 ‘자연수’의 의미는 완전히 특성규정될 수 없다.(어떠한 형식체계 P에 의해서도 ‘자연수’의 의미는 완전히 특성규정될 수 없다.)

전제 II.1.2. 괴델 정리는 옳다.

반대논증 II.1.3. 사용의미론은 옳지 않다.

(1) 만약 괴델정리가 옳다면, ‘자연수’의 의미는 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다.

(2) 만약 ‘자연수’의 의미가 어떠한 형식체계 P에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다면, 사용의미론은 옳지 않다.

(3) 그러므로, 전건긍정규칙과 전제 II.1.2에 의해, 사용의미론은 옳지 않다.

논제 II.1.4. 임의의 주어진 수학적 표현 e에 대해, 만약 e의 의미가 어떤(some) 형식체계 P에 의해 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확(perfectly definite)하다.

논제 II.3.1 임의의 주어진 진술 φ에 대해, S는 ‘의미론적 실재론자’다. iff S는 φ가 객관적인(objective) 진리값을 지니고 있고 그것의 진리값을 얻기 위한 방법(means)이 우리의 인지 영역에 독립적인 것이라고 믿는다.

논제 II.3.2. 진술의 의미는 그것의 사용을 결정하고 그것의 사용에 의해 완전히 결정된다.

논제 II.3.3. 문장의 맥락에서만 단어는 의미를 지닌다.

논제 II.3.4. 진술의 의미는 개개인간의 의사소통의 도구로서의 역할만을 수행한다.

전제 II.3.5. 만약 (페아노) 산수 체계에 대한 유일한 자연수 집합으로써의 모형이 완전히 특성규정될 수 있다면, ‘자연수’의 의미는 (단일한 형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정된다.

논제 II.3.6. 모든 사용가능한(workable) 의미론은 유한한 기초를 지닌다.

논제 III.2.1. 임의의 주어진 (수학적) 표현 e와 e의 의미에 대한 한정적(definite) 특성규정 C에 대해, e의 의미가 무한정 확장가능하다. iff C에 의해 특성규정되지 않는 더욱 포괄적인 의미를 산출하는 자연스러운 확장

이 존재한다.

명제 III.2.2. 어떠한 형식체계 P에 의해서도 '증명가능성'의 의미는 완전히 특성규정될 수 없다.

전제 III.2.3. '자연수'의 의미에 관한 가장 적합한 설명(특성규정)방식은 형식체계 P에 의한 방식이다.

전제 III.2.4. 임의의 주어진 수학적 표현 e와 형식체계 P 보다 더 적합한 특성규정 방식 M에 대해, 만약 e의 의미가 M에 의해서 완전히 특성규정된다면, e의 의미는 완전히 명확하다.

전제 III.2.5. 임의의 주어진 수학적 표현 e와 특성규정 방식 M_1, M_2에 대해, M_2가 M_1보다 e의 의미를 특성규정하는데 더 적합한 방식이라는 것은 i) e의 의미에 대한 M_2의 특성규정이 M_1에 의한 특성규정 보다 e의 의미에 대해 더 명시적(explicit) 설명을 제공하며 ii) 만약 M_2에 의해 e의 의미가 완전히 특성규정되지 않으면 M_1에 의해서도 완전히 특성규정되지 않는다는 의미이다.

전제 III.3.1. 어떤 표현의 의미를 형식체계를 통해 특성규정한다는 것(혹은 형식화한다는 것)은 최소한 다음의 두 가지 특징을 지닌다. i) 형식화는 의미에 호소하지 않는 기계적 절차에 의한 특성규정이다. ii) 형식화는 어떤 표현의 의미에 대해 할 수 있는 한 애매하고 모호한 표현을 피하고 보다 명확한(definite) 표현에 의한 특성규정이다.

전제 III.4.1. 임의의 주어진 수학적 표현 e에 대해, 만약 e의 의미가 완전히 명확하다면 e의 의미는 (어떤 형식체계 P에 의해) 완전히 특성규정된다.

논제 IV.1.1. 진술의 의미를 아는 것은 그 진술을 검증하는 것으로 간주되는 바를 인식할 수 있다는 것이다. 다시 말해, 결정적으로 그것을 참으로 설명하는 바를 인식할 수 있다는 것이다.

논제 IV.1.2. 수학적 진술이 직관적으로 참이라는 것은 그것에 대한 (직관적인) 증명이 존재할 경우이다.

개선된 반대논증 IV.1.3 사용의미론은 옳지 않다.

임의의 주어진 형식체계 P에 대해,

(4) 만약 괴델정리가 옳다면, P에 의해서는 그 사용이 설명될 수 없지만 참으

로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다.

(5) 만약 P에 의해서는 그 사용이 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다면, P에 의해서는 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다.

(6) 만약 P에 의해서는 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술 U_P가 존재한다면, 사용에 의해서 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술이 존재한다.

(7) 만약 사용에 의해서 그 의미가 설명될 수 없지만 참으로 인식되는 산술적 진술이 존재한다면, 사용의미론은 옳지 않다.

(8) 그러므로, 전건긍정 규칙과 전제 II.1.2에 의해, 사용의미론은 옳지 않다.

전제 IV.2.1. U_P의 의미를 이해하는 가장 적합한 방식은 형식체계 P 혹은 그 것의 확장에 의한 것이다.

부록 II. 번역된 원문

(i) 'In view of the fact that Gödel's theorem applies to any system which contains arithmetic, there would again be an arithmetical statement expressible but not provable in this system, which we could recogni[z]e to be true: we should thus not have succeeded by this means in giving a complete characteri[z]ation of the concept 'natural number'.

Those who accept this view of the matter readily draw the conclusion that the expression 'natural number' is a counter-example to the thesis that the meaning of an expression is to be explained in terms of its use.' in Dummett(1963), p. 187: 8.

(ii) 'Everyone who is familiar with the expression 'natural number' has a perfectly clear intuitive grasp of its meaning; but its meaning is such ... that no account of our - or any possible - use of this expression can exhaustively explain what it is for it to have that meaning.' in Dummett(1963) , p. 187: below 18.

(iii) 'We all of us have the concept of 'natural number'; but no finite description of our use of arithmetical statements constitutes a full account of our possession of this concept, and this is shown by the fact that we shall always be able, by appeal to our intuitive grasp of the concept, to recogni[z]e as true some statement whose truth cannot be derived from that description of the use of such statements.' in Dummett(1963), p. 190:3.

(iv) 'The use of a mathematical expression could be [completely] characteri[z]ed by means of a single formal system only if the sense of that expression were perfectly definite; when, as with 'natural number', the expression has an inherently vague meaning, it will be essential to the characteri[z]ation of its use to formulate the general principle according to which any precise formal characteri[z]ation can always be extended.' in Dummett(1963), p.198: 15.

(v) 'Teaching a child language is not like teaching code. ... All that we can do is to use sentences containing the word, and to train the child to imitate that use.' in Dummett(1963), p. 188:10.

(vi) 'A meaning, not reducible to use, which I attach to a word ... is something which I can recogni[z]e only in myself: I cannot recogni[z]e in you, and I canoot tell you how to recogni[z]e it in yourself.' in Dummett(1963) ,p.190: 19.

(vii) 'describe the distinctive nature or features of' in Oxford Dictionaries, http://oxforddictionaries.com/definition/english/characterize

(viii) '1. Initial explanations of certain basic technical terms of the discourse are given, the intention being to suggest to the reader what is to be meant by these basic terms. 2. Certain primary statements that concern the basic terms and that are felt to be acceptable as true on the basis of the properties suggested by the initial explanations are listed. These primary statements are called the axioms or postulates of the discourse. 3. All other technical terms of the discourse are defined by means of preciously introduced terms. 4. All other statements of the dicourse are logically deduced from previously accepted or established statements. These derived statements are called the theorems of the discourse.' in Eves(1990), p. 14:1.

(ix) 'I should like to ask you to lend your attention to the following train of thought which constitutes the genesis of my essay. How did my essay come to be written? Certainly not in one day, but rather it is the result of a synthesis which has been constructed after protracted labour. The synthesis is preceded by and based upon an analysis of the sequence of natural numbers, just as it presents itself, in practice so to speak, to the mind. Which are the mutually independent fundamental properties of this sequence N, i.e. those properties which are not deducible from one another and from which all others follow?' in Wang(1957), p. 150:2.

(x) 'When the problem is put in this manner, one is, I believe, forced to accept the following facts:

(1) The number-sequence N is a system of individuals or elements which are called numbers. This leads to the general study of systems as such (∮1 of my essay.).

(2) The elements of the system N stand in a certain relation to one another, they are in a certain order determined, in the first place, by the fact that to each definite number n, belongs again a definite number n', the number which succeeds or is next after n. This leads to the consideration of the general concept of a mapping φ of a system (∮2). Since the image $\varphi(n)$ of each number n is again a number n' and therefore $\varphi(N)$ is a part of N, we are here concerned with the mapping φ of a system N into itself. And so this must be studied in its full generality (∮4).

(3) Given distinct numbers a, b, their successors a', b' are also distinct; the mapping φ has therefore the character of distinctness of similarity (∮3).

(4) Not every number is a successor n', i.e. $\varphi(N)$ is a proper part of N; this (together with the preceding paragraph) constitutes the infinitude of the number-sequence N (∮5).

(5) More precisely, 1 is the only number which does not lie in $\varphi(N)$. Thus we have listed those facts which you regard as the complete characterization of an ordered simply infinite system N.' in Wang(1957), p. 150: 14.

(xi) '... It is remarkable that Dedekind obtained the Peano axioms entirely by analyzing the sequence of natural numbers. What is more remarkable is, once he had completed his analysis, he believed that properties of and theorems about natural numbers can all be derived from his characterization. This belief has to a large extent been confirmed by later developments. Clearly Dedekind did not look at a great number of theorems and proofs about natural numbers to see that no other characteristics are needed. Rather, he verified to his own satisfaction that the sequence of natural numbers is completely determined by his axioms, and then concluded that the axioms are adequate to the derivation of theorems as well. The mystery is how he made his verification.' in Wang(1957), p. 153: below 5.

(xii) '(6) But I have shown in my reply that these facts are still far from being adequate for a complete characterization of the nature of the number-sequence. Indeed, all these facts also apply to every system S which, in addition to the number-sequence N, contains also a system T of arbitrary other elements t. ...

What must we now add to the facts above in order to cleanse our system S from such alien intruders t which disturb every vestige of order, and to restrict ourselves to the system N?' in Wang(1957), p. 150: below 20.

(xiii) 'as Kreisel has remarked, the issue concerning platonism relates, not to the existence of mathematical objects, but to the objectivity of mathematical statements.

For these reason I shall take as my preferred characterisation of a dispute between realists and anti-realists one which represents it as relating, not to a class of entities or a class of terms, but to a class of statements, ... Realism I characteri[z]e as the belief that statements of the disputed class possess an objective truth-value, independently of our means of knowing it: they are true or false in virtue of a reality existing independently of us.' in Dummett(1963b), p. 146: 10.

(xiv) 'If we are concerned ... with what it is that mathematicians are talking about, we have to think, not merely of mathematical structures, but of how they are given to us, that is, how they are characteri[z]ed.' in Dummett(1991a), p. 53: 6.

(xv) '... how the senses of sentences containing terms for numbers are to be fixed.' in Dummett(1991a), p. 111: below 6.

(xvi) '... the application of number-words - their use to answer the questions 'How many?' and 'How often?' - is unproblematic; since we know how to give a satisfactory account of this aspect of their use, we need concern ourselves only with purely arithmetical statements. And just what we cannot do ... is to characteri[z]e completely the meaning of 'natural number' by specifying which arithmetical statements we are prepared to assert and which forms of inference within arithmetic we are prepared to accept.' in Dummett(1963a), p. 187: 19.

(xvii) 'The meaning of a ... statement determines and is exhaustively determined by its use.' in Dummett(1973), p. 216: below 16.

(xviii) 'Only in the context of a sentence does a word have meaning.' in Dummett(1973), p. 230: 17.

(xix) 'The meaning of a statement consists solely in its role as an instrument of communication between individuals.' in Dummett(1973), p. 216: below 11.

(xx) 'My principal target, which Wright does not mention, was the idea, perhaps far less popular now than when I was writing, that our grasp of the concept of natural number consists in an inner mental apprehension of 'the standard model' which, it results from Gödel's theorem, cannot be fully articulated by any formal [system P]. If, on the contrary, it consists in our mastery of the use of sentences concerning natural numbers, the, if the concept is a [perfectly] definite one, that part of our use of such sentences that relates to our capacity to recogni[z]e the truth of number-theoretic statements ought to be capable of encapsulation in a formal [system P]. Gödel's theorem shows this not to be so: the problem was to explain this fact without abandoning the principle that a grasp of meaning is a mastery of use and falling back on appeal to the illegitimate notion of a model as something apprehended by inner intuition independently of verbal characteri[z]ations.' in Dummett(1994), p. 335: below 16.

(xxi) 'The mistake in the account we are considering [that Gödel's theorem is a counter-example to the use theory of meaning] lies ... in its misapplication of the notion of a model.' in Dummett(1963a), p. 190: below 2.

(xxii) 'The account of Gödel's theorem we are considering ... operates with the notion of a model as if it were something that could given to us independently of any description: as a kind of intuitive conception which we can survey in its entirety in our mind's eye, even though we can find no description which determines it uniquely. This has nothing to do with the concept of a model as that concept is legitimately used in mathematics. There is no way in which we can be 'given' a model save by being given a description of that model. If we cannot be given a complete characterization of a model for number theory, then there is not any other way in which, in the absence of such a complete description, we could nevertheless somehow gain a complete conception of its structure.' in Dummett(1963a), p. 191: 8.

(xxiii) 'This fact, which we know on the strength of our clear intuitive conception of the structure of the model, we can never succeed in completely expressing [our intuitive conception of the structure of the model] in a formal system, and this is why we can never completely characteri[z]e the model by means of a formal system.

We cannot formally characteri[z]e the natural numbers up to isomorphism. Of any formal characteri[z]ation, we can describe models which we recogni[z]e as non-standard.' in Dummett(1963a), p. 191: below 10.

(xxiv) 'Second-order arithmetic [system] AR is categorical. ... [AR] has denumerably infinite models and no uncountable models. Second-order analysis AN is also categorical. ... [AN] has uncountable models and no countable models. Thus we have the following.

THEOREM 4.12. Both Löwenheim-Skolem theorems fail for second-order languages with standard semantics.' in Shapiro(1991/2002), p.86: 14.

(xxv) 'The natural axiomati[z]ation of all of [the basic mathematical theories] is a second-order one: the fact that second-oder logic is not completely formali[z]able renders the theories themselves — in first- or second-oder versions — incompletely formali[z]able.' in Dummett(1967), p. 207:below 1.

(xxvi) 'The incompleteness of a formal system of arithmetic means that it has non-standard models ... it becomes natural to say that, because the formal system fails to capture fully our intuition of this structure, it permits ... to deviant structures.' in Dummett(1967), p. 210: below 11.

(xxvii) 'What is clear is that, like any workable theory of meaning, it must have a finite base: the knowledge that a speaker has, in knowing the language, is a finite amount of knowledge, although it issues in the understanding of infinitely many sentences.' in Dummett(1975a), p.136: below 8.

(xxviii) 'Platonism gains its appeal from the fact that it accounts for [the] facts about our mathematical understanding in the simplest possible way: namely by the thesis that there really do exist such structures of abstract objects, and that we are capable of apprehending them by a faculty of intellectual intuition which is to abstract entities as our powers of perception are to physical objects.' in Dummett(1967, p. 207: 17)

(xxix) 'Rather, the complex phrase on which attention needs to be concentrated is 'knowing the meaning of ...': a theory of meaning is a theory of understanding' in Dummett(1973/1981), p. 92: below 9.

(xxx) '... our grasp of the concept of natural number consists in an inner mental apprehension of 'the standard model' which, it results from Gödel's theorem, cannot be fully articulated by any formal [system P]' in Dummett(1994), pp. 335: below 15.

(xxxi) 'the fact that second-order logic is not completely formali[z]able renders the theories themselves - in first- or second-order versions - incompletely formali[z]able.' in Dummett(1967), p. 207: below 1.

(xxxii) 다음의 두 언급을 참고하라.

'By a "precise formal" characterization Dummett means the kind of characterization that a formal system provides. What he is envisaging here is a characterization that is not a "precise formal" one, a characterization in which essential use is made of a formulation of the general principle to which he refers.' in Moore(1998), p. 107: below 6.

'To see how this relates to the Gödel case we need only equate giving a precise formal characterization of our use of the expression 'natural number' with specifying a definite totality of things falling under the concept well-defined property of all the natural numbers.' in Moore(1998), p. 116: below 2.

(xxxiii) 다음의 언급들을 참고하라.

'As soon as it is granted that any intuitively sound system of arithmetic merely partially describes the subject matter to which it answers, an explanation is owing of how the subject matter in question can possess a determinacy transcending complete description.' in Wright(1994), p. 168: 2.

'The problem ... is that to allow that the subject matter of arithmetic is determinate beyond any systematic description is apparently ... to admit that our understanding of arithmetical concepts transcends any systematic description of correct arithmetical practice.' in Wright(1994), p. 168: below 17.

'... any attempt at a systematic characterization of that concept will fil to determine the truth-values of statements on which the conception itself is not neutral.' in Wright(1994), p. 168: below 8.

(xxxiv) '... the application of number-words - their use to answer the questions 'How many?' and 'How often?' - is unproblematic; since we know how to give a satisfactory account of this aspect of their use, we need concern ourselves only with purely arithmetical statements. And just what we cannot do ... is to characteri[z]e completely the meaning of ‘natural number’ by specifying which arithmetical statements we are prepared to assert and which forms of inference within arithmetic we are prepared to accept.’ in Dummett(1963a), p. 187: 19.

(xxxv) ‘... A concept is not ... to be characterized solely by the criterion for its application, that is, for judging whether an object ... falls under it, but also by the criterion for saying that something holds good of everything falling under it.’ in Dummett(1994), p. 336: 6.

(xxxvi) ‘The roots of the notions of truth and falsity lie in the distinction between a speaker's being, objectively, *right* or *wrong* in what he says when he makes an assertion.’ in Dummett(1978), p. xvii: 6.

(xxxvii) ‘The argument to establish the truth of $[U_P]$ involves establishing the consistency of the formal system. The interest of Gödel's theorem lies in its applicability to any intuitively correct system for number theory. For certain particular formal systems, we may have a genuinely informative consistency proof; e.g. for the most natural type of system, we have a consistency proof of the kind first given by Gentzen, using transfinite induction up to ϵ_0. From the consistency proof, together with Gödel's reasoning, the truth of $[U_P]$ of course follows. But in the particular case, we learn from this only the epistemologically unsurprising fact that the particular formal system in question fails to embody everything that we intuitively recogni[z]e as true concerning the concept of 'natural number'; e.g. in the case mentioned, the validity of transfinite induction up to ϵ_0. What needs to be explained, however, is the general applicability of Gödel's theorem to every intuitively correct formal system; the fact that no such system can embody all that we wish to assert about the natural numbers. We have, therefore, to consider the consistency proof with which Gödel's reasoning must be supplemented if the truth of $[U_P]$ is to be established as one which we know that we can give for any formal system, provided only that it is assumed about that system that it is intuitively correct. Such a general form of consistency proof cannot, of course, be expected to be genuinely informative; it can only be the trivial kind of proof by induction on the length of formal proofs with respect to the property of having a true conclusion.’ in Dummett(1963a), p. 194: 17.

(xxxviii) ‘In the formal system ... we can embody the validity of induction only with respect to properties expressible in the system. Once a system has been formulated, we can, by reference to it, define new properties not expressible in it, such as the property of being a true statement of the system; hence, by applying induction to such new properties, we can arrive at conclusions not provable in it.’ in Dummett(1963a), p. 195: 7.

(xxxix) ‘Everyone who is familiar with the expression 'natural number' has a perfectly clear intuitive grasp of its meaning; but its meaning is such ... that no account of our – or any possible – use of this expression can exhaustively explain what it is for it to have that meaning.' in Dummett(1963a) , p. 187: below 18.

(xl) 'We all of us have the concept of 'natural number'; but no finite description of our use of arithmetical statements constitutes a full account of our possession of this concept, and this is shown by the fact that we shall always be able, by appeal to our intuitive grasp of the concept, to recogni[z]e as true some statement whose truth cannot be derived from that description of the use of such statements.' in Dummett(1963a), p. 190:3.

(xli) 'A concept is indefinitely extensible if, for any definite characteri[z]ation of it, there is a natural extension of this characteri[z]ation, which yields a more inclusive concept.' in Dummett(1963a), p. 195: below 5.

(xlii) '... it might be pointed out that a formal system does not replace the intuitive proofs as, frequently, a precise concept replaces a vague intuitive one; the formal system remains, as it were, answerable to the intuitive conception, and is of interest to us only in so far as it does not reveal undesirable features which the intuitive idea does not possess. An example would be Gödel's theorem, which shows that provability in a single formal system cannot do duty as a complete substitute for the intuitive idea of arithmetical truth.' in Dummett(1959b), p. 172: below 12.

(xliii) 'The intuitive conception of a valid mathematical proof, even for statements within some circumscribed theory, cannot in general be identified with the concept of a proof within some one formal system; for it may be the case that no formal system can ever succeed in embodying all the principles of proof that we should intuitively accept; and this is precisely what is shown to be the case in regard to number theory by Gödel's theorem. In this case, as we have seen, this simply means that the class of intuitively acceptable proofs is an indefinitely extensible one.' in Dummett(1963a), p. 200: below 5.

(xliv) '... just what we cannot do ... is to characteri[z]e completely the meaning of 'natural number' by specifying which arithmetical statements we are prepared to assert and which forms of inference within arithmetic we are prepared to accept.' in Dummett(1963a), p. 187: below 22.

(xlv) '[Wittgenstein] wishes, like the intuitionists, to insist that we cannot draw a line in advance round the possible forms of argument that may be used in mathematical proofs. Furthermore, it might be pointed out that a formal system does not replace the intuitive proofs as, frequently, a precise concept replaces a vague intuitive one.' in Dummett(1959b), p. 172: 21.

(xlvi) '... that a mathematical proof or construction is essentially a mental entity, something that may be capable of being represented by an arrangement of symbols on paper, but cannot be identified with it. This thesis is not intended merely as a protest against a superficial formalism which takes no account at all of the interpretation we put on our symbols: it is a rejection of the idea that there can even be an isomorphism between the totality of possible proofs of statements within some mathematical theory and any determinately specified totality of symbolic structures, i.e. proofs within any formal system. Intuitionist language on this matter is, rightly, repugnant to anyone who has grasped the point of Frege's repudiation of 'psychologism', of the introduction of strictly psychological concepts into logic or mathematics. But when the intuitionist conception is stripped of its psychologistic guise, it can be recogni[z]ed to be entirely correct.’ in Dummett(1963a), p. 200: 20.

(xlvii) ‘The intuitionists ... were from the start hostile to formalization: for them, it is highly unlikely that the mental constructions intuitively recognizable as proving a statement of a given theory should be isomorphic to the formal proofs of any calculus, recognizable as such by a mechanical procedure making no appeal to meaning.’ in Dummett(2000), p. 211: 8.

(xlviii) ‘... an understanding of the expression 'natural number' will be insufficient to determine the criterion by which something is recogni[z]ed as a ground for asserting that something is true of all the natural numbers: and it is precisely the concept of such a ground which is shown by Gödel's theorem to be indefinitely extensible’ in Dummett(1963a, p. 194: 5.)

(xlix) ‘1. Mathematics is not formal; the objects of mathematics are mental constructions in the mind of the (ideal) mathematician. ... 2. Mathematics is independent of experience in the outside world, and mathematics is in principle also independent of language. ... 3. Mathematics does not depend on logic; on the contrary, logic is part of mathematics.’ in Troelstra(1991), pp. 8-9

(l) ‘... for scientific thinking is nothing but a fixation of the will within the confines of the human head, a scientific truth no more than an infatuation of desire restricted to the human mind.’ in Brouwer(1905), p. 4: below 20.

(li) ‘Even in the most restricted science, logic and mathematics ... , no two different people will have the same conception of the fundamental notions of which these two sciences are constructed.’ in Brouwer(1905), p. 6: below 17.

(lii) ‘Language by itself has no meaning; any philosophy which in this way tried to find a firm foundation has come to grief. ... A language which does not derive its certainty from the human will, which claims to live on in the 'pure concept' is an absurdity. To be able to go on talking without being caught in a contradiction or without making a silent assumption is an art to be valued only in an acrobat.’ in Brouwer(1905), p. 6: below 4.

(liii) ‘... it is easily conceivable that, given the same organization of the human intellect and consequently the same mathematics, a different language would have been formed, into which the language of logical reasoning ... would not fit.’ in Brouwer(1907), p. 73: below 1.

(liv) ‘On the basis of linguistic images which accompany basic mathematical truths in actual mathematical structures, it is sometimes possible to build up linguistic structures, sequences of sentences, proceeding according to the logical laws. If it turns out that such a structure can never produce the linguistic form of a contradiction, then all the same it belongs to mathematics only in its quality of a linguistic structure, and it has nothing to do with mathematics outside of it, such as ordinary arithmetic or geometry.

So the idea that by means of such linguistic structures we can obtain knowledge of mathematics apart from that which can be constructed by direct intuition, is mistaken.' in Brouwer(1907), p. 75: below 22.

(lv) 'In the system of definitions there are elements of mathematical construction which must remain irreducible and which therefore, when communicated, must be understood from a single word or symbol. ... A logical construction of mathematics, independent of the mathematical intuition, is impossible - for by this method no more is obtained than a linguistic structure ... - and moreover it is a contradiction in terminis - because a logical system needs the basic intuition of mathematics as much as mathematics itself needs it.' in Brouwer(1907), p. 97: 13.

(lvi) '... the intuitionist can never feel assured of the exactness of a mathematical theory by such guarantees as the proof of its being non-contradictory, the possibility of defining its concepts by a finite number of words, or the practical certainty that it will never lead to a misunderstanding in human relations.' in Brouwer(1912), p. 128: below 8.

(lvii) 'It is true that even in intuitionistic mathematics the finished part of a theory may be formalized. It will be useful to reflect for a moment upon the meaning of such a formalization. We may consider the formal system as the linguistic expression, in a particularly suitable language, of mathematical thought.' in Heyting(1957/1971), p. 4: below 11.

(lviii) '... intuitionism proceeds independently of the formalization, wich can but follow after the mathematical construction.' in Heyting(1957/1971), p. 5: 14.

(lix) 'Children in the elementary school understand what the natural numbers are and they accept the fact that the sequence of natural numbers can be indefinitely continued.' in Heyting(1957/1971), p. 7: below 15.

(lx) 'We do not claim for [the cardinality of natural number] any form of certainty or definiteness in an absolute sense, which would be unrealizable, but we contend that it is sufficiently clear to build mathematics upon.' in Heyting(1957/1971), p. 7: below 5.

(lxi) 'No amount of training will teach a chimpanzee to talk. We may suppose, then, that the concept is latent in the child's mind, so that, while it is the training in the use of the word which, as it were, awakens the concept, and at the same time leads the child to associate that word with it, still it may be that no finite description of the use of the word can exhaust what it is to have the concept. We all of us have the concept 'natural number'; but no finite description of our use of arithmetical statements constitutes a full account of our possession of this concept, and this is shown by the fact that we shall always be able, by appeal to our intuitive grasp of the concept, to recogni[z]e as true some statement whose truth cannot be derived from that description of the use of such statements.' in Dummett(1963a, pp. 189: below 3.)

(lxii) 'Even in the case of a finite totality, the conception of that totality is not completely characteri[z]ed by the way in which an object is recogni[z]ed as belonging to that totality: for two people might agree in their dispositions to recogni[z]e something as belonging to the totality, and still differ on the criteria they accepted for asserting something to be true of all the members of the totality. Still more is this true if the totality is infinite. The question whether two people mean the same by a certain expression, as it arises in everyday life, is not indeed entirely definite: no doubt there are contexts in which it would be natural to allow an agreement as to the criterion for the correct application of a predicate to imply an agreement on its meaning; in this sense, then, we do have a unique and definite meaning for the expression 'natural number'. In this case, however, an understanding of the expression 'natural number' will be insufficient to determine the criterion by which something is recogni[z]ed as a ground for asserting that something is true of all the natural numbers: and it is precisely the concept of such a ground which is shown by Gödel's theorem to be indefinitely extensible; for any definite characteri[z]ation of a class of grounds for making an asserting about all natural numbers, there will be a natural extension of it. If we understand the word 'meaning' differently, so as to make the meaning of the expression 'natural number' involve, not only the criterion for recogni[z]ing a term as standing for a natural number, but also the criterion for asserting something about all natural numbers, then we have to recogni[z]e the meaning of 'natural number' as inherently vague.' in Dummett(1963a, p. 193: below 7)

(lxiii) 'the idea that by means of such linguistic structures we can obtain knowledge of mathematics apart from that which can be constructed by direct intuition, is mistaken.' in Brouwer(1907), p. 75: below 15.

(lxiv) 'We have a strong conviction that we do have a clear grasp of the totality of natural numbers; but what we actually grasp with such clarity is the principle of extension by which, given any natural number, we can immediately cite one greater than it by 1.' in Dummett(1991a), p. 318: 14.

(lxv) 'I did not consider the concept of natural number to be itself indefinitely extensible (as a finitist might do), nor to have the reverse property of being indefinitely retractable; what was indefinitely extensible was, rather, the notion of a ground for asserting something about all natural numbers.' in Dummett(1994), p. 336:1.

(lxvi) '... the criterion for asserting something of all objects falling under a concept is an essential feature of that concept' in Dummett(1994), p. 338: below 8.

(lxvii) 'My two principal contentions were (1) that the criterion for asserting something of all objects falling under a concept is an essential feature of that concept, but is not automatically given with the criterion for a given objects falling under it, and (2) that, for the concept 'natural number', the former criterion is indefinitely extensible.' in Dummett(1994), p. 228: below 8.

(lxviii) 'To know the meaning of a statement is to be capable of recognizing whatever counts as verifying the statement, i.e. as conclusively establishing it as true.' in Dummett(1973), p.227.

(lxix) 'A mathematical statement is intuitionistically true if there exists an (intuitionistic) proof of it.' in Dummett(1973), p.239.

(lxx) 'it may be the case that no formal system can ever succeed in embodying all the principles of proof that we should intuitively accept.' in Dummett(1963), p. 200: below 5.

(lxxi) 'x is a derivation of z from the axioms of Peano arithmetics.'

(lxxii) "For each formula $\varphi(x)$ including one free variable, there exists a sentence ψ such that $\vdash \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \leftrightarrow \psi$."

(lxxiii) 'Constructing $[U_P]$, for a given system $[P]$, is a mechanical process; recogni[z]ing $[P]$ as intuitively correct is not, and this is necessary if we are to have any reason to regard $[U_P]$ as true.' in Dummett(1994), p. 336: below 4.